UNA INTRODUCCIÓN A LAS ÁLGEBRAS DE LIE

Esther Galina

Universidad Nacional de Córdoba

Estas notas fueron realizadas para el curso "Introducción a las Álgebras de Lie" dictado en la Escuela de Verano de la Universidad Sergio Arboleda en la ciudad de Bogotá, Colombia, entre el 27 de junio y el 11 de julio de 2007. Están basadas en notas del curso del I Encuentro Nacional de Álagebra, Córdoba, Argentina [G], en el libro de Jean Pierre Serre [S], el libro de Antony Knapp [K] y en las notas del curso de "Álgebras de Lie semisimples y representaciones de dimensión finita" de Nicolás Andruskiewischt [A].

Aprovecho la oportunidad para agradecer la amabilidad brindada por los profesores, los alumnos y todo el personal del Departamento de Matemática de la Universidad Sergio Arboleda. Ha sido un gusto para mi poder colaborar con la formación de los estudiantes y futuros investigadores de esta Universidad y de participar en este tipo de instancias que ayudan a fortalecer la matemática de toda Latinoamérica.

1. Un poco de historia.

Como la historia lo ha demostrado, en general los resultados importantes y trascendendentes en matemática son los capaces de vincular dos estructuras, en su esencia, totalmente distintas. Sophus Lie (1849-1925), estudiando propiedades de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales, dió el puntapié inicial a lo que hoy llamamos la Teoría de Lie. Según Bourbaki [B], una de sus ideas más originales fue la introducción de la noción de invariantes en el análisis y en la geometría diferencial, una de las observaciones que hizo fue que los métodos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales "por cuadraturas" se basaban todos en el hecho que la ecuación es invariante por una familia "continua" de transformaciones. Es decir que dada una solución del sistema, al aplicarle dichas transformaciones producen otras soluciones, lo cual da mucha información del conjunto de soluciones permitiendo atacarlas como espacios vectoriales en los que actúa un conjunto de transformaciones.

Lie estaba preocupado en estudiar la familia de transformaciones continuas (no necesariamente lineales) en n variables

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) \qquad 1 \leq i \leq n \tag{1.1}$$

dependiendo "efectivamente" de r parámetros, que dejan invariante el sistema diferencial. Como primera observación Lie obtuvo que este conjunto de transformaciones continuas era un grupo cerrado para la composición, pero no en un sentido global,

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

pues las funciones f_i no estaban definidas globalmente. Asumiendo que la transformación (1.1) es la identidad para los valores $a_1^o, \dots, a_r^o$, el hecho importante fue que a cada grupo de transformaciones le podía asociar una familia de "transformaciones infinitesimales" que contenía la información que ahora viene asociada al álgebra de Lie. Rápidamente hablando, el término de primer orden de los desarrollos de Taylor de las funciones f_i

$$f_i(x_1, \dots, x_n; a_1 + z_1, \dots, a_r + z_r) = x_i + \sum_{k=1}^{r} z_k X_{ki}(x_1, \dots, x_n) + \dots \qquad 1 \leq i \leq n,$$

da lugar a una transformación "genérica" que mueve puntos en distancias infinitamente pequeñas que depende linealmente de r parámetros z_i

$$dx_i = \left(\sum_{k=1}^{r} z_k X_{ki}(x_1, \dots, x_n) \right) dt$$

Al integrar el sistema diferencial

$$\frac{d\xi_1}{\sum_{k=1}^{r} z_k X_{k1}(\xi_1, \dots, \xi_n)} = \dots = \frac{d\xi_n}{\sum_{k=1}^{r} z_k X_{kn}(\xi_1, \dots, \xi_n)} = dt$$

para cada punto $(z_1, \dots, z_r)$, Lie obtiene un grupo de un parámetro

$$t \to x_i' = g_i(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_r, t) \tag{1.2}$$

de modo que $x_i = g_i(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_r, 0)$ para todo i. Además, usando que la transformación (1) es estable para la composición, el grupo monoparamétrico (1.2) es un subgrupo del grupo de transformaciones dado. En el caso en que el grupo de transformaciones continuas sea un subgrupo cerrado de matrices invertibles el grupo monoparamétrico (1.2) es

$$e^{tX} = \sum_{j \geq 0} \frac{t^j X^j}{j!}$$

donde X es la matriz determinada por los vectores $\frac{dg_i}{dt}|_{t=0} = \sum_{k=1}^{r} z_k X_{ki}(x)$ para $1 \leq i \leq n$. Y satisface que

$$e^{(t+s)X} = e^{tX} e^{sX}$$

Analizando el término de segundo orden en el desarrollo de Taylor de los g_i y teniendo en cuenta las propiedades de composición de las transformaciones aparecen las siguientes relaciones

$$\sum_{j=1}^{n} \left(X_{hj}(x) \frac{\partial X_{ki}}{\partial x_j} - X_{kj}(x) \frac{\partial X_{hi}}{\partial x_j} \right) = \sum_{l=1}^{n} c_{lhk} X_{li}(x) \tag{1.3}$$

Considerando $z_k = 1$ y $z_h = 0$ si $h \neq k$ en cada una de las r transformaciones infinitesimales, Lie les asocia los operadores $A_k = \sum_{i=1}^{n} X_{ki}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ y reescribe las condiciones (1.3) obteniendo

$$[A_h, A_k] = A_h A_k - A_k A_h = \sum_{l} c_{lhk} A_l$$

donde las constantes c_{lhk} son fijas para cada grupo continuo de transformaciones. Así aparece una estructura fundamental en el espacio vectorial generado por los A_k que da origen a la noción de *álgebras de Lie.*

Lie tuvo ocación de trabajar con grupos globales particulares como los grupos clásicos de matrices complejos. Pero la idea de estudiar sistemáticamente grupos definidos globalmente surgió con Weyl (1924). Los aspectos fundamentales que caracterizaron el trabajo de Lie son la de asociar a cada grupo de transformaciones continuas un álgebra de Lie y la de establecer una aplicación del álgebra de Lie al grupo a través de los grupos monoparamétricos.

2. Definición y ejemplos.

De acuerdo lo discutido en la sección anterior, la noción de álgebra de Lie surge como un espacio vectorial de transformaciones lineales munido de un nuevo producto: $[x, y] = xy - yx$ (con el producto usual de transformaciones lineales a la derecha de la igualdad) que en general no es ni conmutativo ni asociativo.

Definamos más precisamente estos conceptos en la forma más general. Sea k un cuerpo (con mayor generalidad todavía k un anillo conmutativo con unidad) entendemos por álgebra lo siguiente:

Definición. *Un k-espacio vectorial (k-módulo) A es un álgebra sobre k si viene dado con una aplicación k-bilineal $A \times A \to A$.*

Observemos que esta aplicación o *producto* no es necesariamente asociativo.

Ejemplos. 1. El espacio de matrices $(M(n, k), .)$ con el producto usual de matrices es una k-álgebra no conmutativa y asociativa.

2. El espacio de matrices $(M(n, k), [\,,])$ con el producto definido por $[x, y] = xy - yx$ es una $k$álgebra no conmutativa y no asociativa.

Ejercicio 2.1. En la difinición más general de álgebra probar que se puede reemplazar la condición "con una aplicación k-bilineal $A \times A \to A$" por "con un morfismo de k-espacios vectoriales (k-módulos) $A \otimes_k A \to A$".

Definición. *Un álgebra $(\mathfrak{g}, [\,,])$ es un álgebra de Lie si el producto satisface:*
(i) $[x, y] = -[y, x]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$ (producto antisimétrico).
(ii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$ (identidad de Jacobi).

Ejercicio 2.2. Probar que son equivalentes:
a) *(i)* de la definición;
b) $[x, x] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$;
c) que el morfismo $A \otimes_k A \to A$ admite una factorización $A \otimes_k A \to \bigwedge^2 A \to A$.

A continuación daremos algunos ejemplos.

Ejemplos. 1. $(M(n, k), [\,,])$ es álgebra de Lie y $(M(n, k), .)$ no lo es.

2. El subespacio $\mathfrak{sl}(n, k)$ de matrices de traza 0 es un álgebra de Lie con el producto $[X, Y] = XY - YX$.

3. Sea $\mathfrak{g}$ un k-espacio vectorial (k-módulo), definamos $[x, y] = 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Esta se dice un álgebra de Lie conmutativa.

4. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie conmutativa, entonces $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \oplus \bigwedge^2 \mathfrak{g}$ es álgebra de Lie con el producto definido para cualesquiera $x, y, z \in \mathfrak{g}$ por

$$[x, y] = x \wedge y \qquad [x, y \wedge z] = [x, y \wedge z] = [x, y \wedge z] = 0$$

5. Un álgebra asociativa $(A, .)$ sobre k con el producto $[x, y] = x.y - y.x$ para todo $x, y \in A$ es un álgebra de Lie.

6. Dado un abierto U de $\mathbb{R}^n$, sea $\mathbf{T}U$ el conjunto de campos vectoriales C^∞ en U, entonces $(\mathbf{T}U, [\,,\,])$ es un álgebra de Lie con $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$ para toda f función suave en U pues $\mathbf{T}U$ es un álgebra asociativa con la composición.

Al definir una nueva categoría de objetos con cierta estructura es necesario también plantear cuando dichos objetos son equivalentes en dicha categoría, es decir hay que definir los morfismos de la categoría. En el caso de las álgebras de Lie definimos los morfismos como sigue.

Definición. *Un morfismo de álgebras de Lie ϕ es un morfismo de k-módulos tal que $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$.*

Ejercicio 2.3. Probar que un *isomorfismo de álgebras de Lie* es un morfismo de álgebras de Lie que es un isomorfismo de k-espacios vectoriales (k-módulos).

Resulta natural definir los siguientes conceptos

Definición. *Una subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un subespacio de $\mathfrak{g}$ cerrado para el corchete, es decir $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.*

Un ideal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ es un subespacio que satisface $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{g}$ es no abeliana y no tiene ideales propios no nulos se dice que es simple.

No es difícil clasificar todas las álgebras de Lie de dimensión 1 y 2.

Ejercicio 2.4. Clasificar todas las álgebras de Lie de dimensión 1.

Ejercicio 2.5. Probar que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2, entonces $\mathfrak{g}$ es abeliana o es isomorfa a una con una base $\{x, y\}$ tal que $[x, y] = y$. Esta última es el álgebra de Lie del grupo de tansformaciones afines del plano.

A continuación nos surge la pregunta ¿habrá una cantidad finita de álgebras de Lie no conmutativas de dimensión 3 no isomorfas entre sí? Antes de contestar esta pregunta veamos varios ejemplos de álgebras de Lie de dimensión 3 con $k = \mathbb{R}$.

1. El álgebra de Lie de todas las matrices del tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es la llamada álgebra de Lie de Heisenberg, incluso cuando k no es $\mathbb{R}$.

2. El álgebra de Lie de todas las matrices del tipo

$$\begin{bmatrix} t & 0 & x \\ 0 & t & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta es el álgebra de Lie del grupo de translaciones y dilataciones del plano.

3. El álgebra de Lie de todas las matrices del tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & \theta & x \\ -\theta & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta es el álgebra de Lie del grupo de translaciones y rotaciones del plano.

4. El álgebra de Lie del producto vectorial es la que tiene base **i,j, k** con corchete

$$[\mathbf{i},\mathbf{j}]=\mathbf{k} \qquad [\mathbf{j},\mathbf{k}]=\mathbf{i} \qquad [\mathbf{k},\mathbf{i}]=\mathbf{j}$$

Esta es un ejemplo de álgebra de Lie simple.

5. Otro ejemplo de álgebra de Lie simple es

$$\mathfrak{s}l(2,\mathbb{R})=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a\end{bmatrix}\right\}$$

Ejercicio 2.6. Encontrar una base $\{h,e,f\}$ de $\mathfrak{s}l(2,k)$ tal que

$$[h,e]=2e \qquad [h,f]=-2f \qquad [e,f]=h$$

6. Para cualquier $\alpha\neq 0$ en k, sea $\mathfrak{g}_\alpha$ el álgebra de Lie generada por $\{x,y,z\}$ que satisface

$$[x,y]=0 \qquad [x,z]=\alpha x \qquad [y,z]=y$$

A través del siguiente ejercicio veamos que hay una cantidad infinita de álgebras de Lie de dimensión 3 no isomorfas entre sícuando k es infinito.

Ejercicio 2.7. Probar para $k=\mathbb{R}$ que si $\alpha>1$ las $\mathfrak{g}_\alpha$ son todas mutuamente no isomorfas. Por lo tanto, si $k=\mathbb{R}$ hay una cantidad no numerable no isomorfas.

7. Dado V un k-espacio vectorial, el conjunto de endomorfismos $\mathfrak{gl}(V)=\mathrm{End}(V)$ de V es una k-álgebra asociativa con la composición, por lo tanto es un álgebra de Lie con $[\,,]$ natural definido a partir de la composición.

8. Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita. Si Tr es la forma lineal traza en $\mathrm{End}(V)$,

$$\mathfrak{sl}(V)=\{T\in\mathfrak{gl}(V):\mathrm{Tr}T=0\}$$

es un a subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$.

Ejercicio 2.8. a) Probar que $\mathfrak{sl}(V)$ es isomorfa a $\mathfrak{sl}(n,k)$.
b) Probar que $[\mathfrak{gl}(V),\mathfrak{gl}(V)]=\mathfrak{sl}(V)$.

9. Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita. Si b es una forma bilineal en $\mathrm{End}(V)$,

$$\mathfrak{g}(b)=\{T\in\mathfrak{gl}(V):b(Tv,w)+b(v,Tw)=0\quad\forall v,w\in V\}$$

es un a subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$.

Afirmación. *Sean b y b' dos formas bilineales conjugadas ($b'(v,w)=b(Pv,Pw)$ para algún $P\in\mathrm{End}(V)$), entonces $\mathfrak{g}(b)$ y $\mathfrak{g}(b')$ son isomorfas.*

En efecto, sea

$$\begin{aligned}\phi:&\mathfrak{g}(b)\to\mathfrak{g}(b')\\ &T\to P^{-1}TP\end{aligned}$$

Por ser ϕ un isomorfismo sólo hay que ver que es un morfismo de álgebras de Lie.

$$\begin{aligned}\phi([T,S]) &= P^{-1}[T,S]P = P^{-1}TSP - P^{-1}STP \\ &= P^{-1}TPP^{-1}SP - P^{-1}SPP^{-1}TP \qquad \square \\ &= [\phi(T),\phi(S)]\end{aligned}$$

Si b es no degenerada y simétrica (resp. antisimétrica), diremos que $\mathfrak{g}(b)$ es ortogonal (resp. simpléctica) y la denotaremos $\mathfrak{so}(V,b)$ (resp. $\mathfrak{sp}(V,b)$).

10. **Familias clásicas de álgebras de Lie:**

A_n: son las del tipo $\mathfrak{sl}(n+1,k)$.

B_n: son las álgebras de Lie ortogonales asociadas a la forma bilineal b definida sobre k^{2n+1} dada por $b(v,w)=v^tSw$, donde identificamos los elementos de k^{2n+1} con vectores columna. Si I_n es la matriz identidad $n\times n$, S está definida por

$$S=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&I_n\\0&I_n&0\end{bmatrix}$$

Notaremos $\mathfrak{g}(b)=\mathfrak{so}(2n+1,k)$.

Ejercicio 2.9. a) Probar que

$$\mathfrak{so}(2n+1,k)=\{X\in\mathfrak{gl}(2n+1) : XS+SX^t=0\}$$

b) Probar que $\mathfrak{so}(2n+1,k)$ es isomorfa al álgebra de Lie $\{X\in\mathfrak{gl}(2n+1) : X+X^t=0\}$.

Ejercicio 2.10. Probar que el álgebra de Lie del producto vectorial es isomorpha a $\mathfrak{s}o(3,\mathbb{R})$.

C_n: son las álgebras de Lie simplécticas correspondientes a $b: k^{2n}\times k^{2n}\to k$ dada por $b(v,w)=v^tJw$, donde

$$J=\begin{bmatrix}0&I_n\\-I_n&0\end{bmatrix}$$

Notaremos $\mathfrak{g}(b)=\mathfrak{sp}(2n,k)$.

Ejercicio 2.11. Probar que $\mathfrak{sp}(2n,k)=\{X\in\mathfrak{gl}(2n) : XJ+JX^t=0\}$

D_n: son las álgebras de Lie ortogonales correspondientes a $b: k^{2n}\times k^{2n}\to k$ dada por $b(v,w)=v^tQw$, donde

$$Q=\begin{bmatrix}0&I_n\\I_n&0\end{bmatrix}$$

Notaremos $\mathfrak{g}(b)=\mathfrak{so}(2n,k)$.

Ejercicio 2.12. a) Probar que $\mathfrak{so}(2n,k)=\{X\in\mathfrak{gl}(2n) : XQ+Q^tX=0\}$.
b) Probar que $\mathfrak{so}(2n,k)$ es isomorfa al álgebra de Lie $\{X\in\mathfrak{gl}(2n) : X+X^t=0\}$.

3. Álgebras de Lie de grupos algebraicos de matrices.

En la primer sección planteamos a grandes razgos cómo ciertas estructuras de álgebras de Lie vienen asociadas a los grupos de transformaciones continuas estudiados por Sophus Lie. Una generalización de dichos grupos dió lugar a los que actualmente se conocen como *grupos de Lie.* Estos involucran una estructura diferencial compatible con la estructura algebraica de grupo. Efectivamente son grupos topológicos con una estructura de variedad diferencial tal que el producto y la inversión son funciones infinitamente diferenciables.

Sea G un grupo de Lie real o complejo y $\mathfrak{g}$ el espacio tangente a G en la identidad. Existe una estructura natural de álgebra de Lie en $\mathfrak{g}$ que estudiaremos en casos en que G sea un subgrupo cerrado de matrices no singulares. Estos grupos tienen una estructura canónica de *grupo de Lie.*

También existen análogos algebraicos, es decir álgebras de Lie asociadas a grupos definidos algebraicamente como ceros de familias de polinomios. En particular veremos cómo ciertos grupos de matrices llamados *grupos algebraicos de matrices* tienen asociados un álgebra de Lie. Serre [S] presenta una manera bien general de hacerlo.

Sea k un anillo conmutativo con identidad. Dada una familia de polinomios $\mathcal{P} = (P_\alpha)$ en n^2 variables con coeficientes en k, un cero de la familia de polinomios $\mathcal{P}$ es una matriz $x = (x_{ij})$ tal que $P_\alpha(x_{ij}) = 0$ con $1 \leq i, j \leq n$ para todo α. Sea $GL(n,k)$ el conjunto de matrices invertibles de $M(n,k)$.

Definición. *$G(k)$ es un grupo algebraico de matrices sobre k si*

(i) es un subgrupo de $GL(n,k)$ para algún natural n;

(ii) es el conjunto de ceros de una familia de polinomios $\mathcal{P} = (P_\alpha)$ en $GL(n,k)$; y

(iii) G(k') es un subgrupo de $GL(n,k')$ para toda k-álgebra conmutativa y asociativa k'.

Si k' es cualquier k-álgebra conmutativa y asociativa tenemos análogamente el conjunto $G(k') \subset GL(n,k')$ definido por la misma familia de polinomios $\mathcal{P}$ con coeficientes en k. Como k está naturalmente contenido en k', si $G(k)$ es un grupo algebraico de matrices tenemos que es un subgrupo de $G(k')$ para toda k-álgebra conmutativa y asociativa k'.

Ejemplo. El grupo de matrices ortogonales $O(n,k)$ es un grupo algebraico donde la ecuación es $X^tX = 1$. En particular, si $k = \mathbb{R}$ y $k' = \mathbb{C}$, tenemos que $O(n,\mathbb{R}) \subset O(n,\mathbb{C})$.

Consideremos ahora la k-álgebra $k[\epsilon]$ libre en sobre k con base $\{1, \epsilon\}$ tal que $\epsilon^2 = 0$. Veamos como podemos asociar algebraicamente un álgebra de Lie a $G(k)$.

Teorema 3.1. *Sea $\mathfrak{g}$ el conjunto de matrices $X \in M(n,k)$ tal que $1+\epsilon X \in G(k[\epsilon])$. Entonces $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie de $M(n,k)$.*

Demostración. Tenemos que probar que si $X, Y \in \mathfrak{g}$ entonces $aX + bY$, para todo $a, b \in k$ y $[X,Y] = XY - YX$ también lo están.

Sabemos que decir que $X \in \mathfrak{g}$ es equivalente a decir que $P_\alpha(1 + \epsilon X) = 0$ para todo α. Como $\epsilon^2 = 0$,

$$P_\alpha(1 + \epsilon X) = P_\alpha(1) + dP_\alpha(1)\epsilon X$$

Pero $1 \in G(k)$, por lo tanto, como $P_\alpha(1) = 0$, $P_\alpha(1 + \epsilon X) = dP_\alpha(1)\epsilon X$. Esto dice que $\mathfrak{g}$ es un subespacio de $M(n, k)$ pues elementos del tipo $aX + bY$, para todo $a, b \in k$ y para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ están en $\mathfrak{g}$, demostrando así la primera afirmación.

Para ver que $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ consideremos el álgebra $k'' = k[\epsilon, \epsilon', \epsilon\epsilon']$ donde $\epsilon^2 = {\epsilon'}^2 = 0$ y $\epsilon\epsilon' = \epsilon'\epsilon$. Notemos que tanto $G(k[\epsilon])$ como $G(k[\epsilon'])$ están contenidos en $G(k'')$, y que si $g = (1 + \epsilon X) \in G(k[\epsilon])$ y $g' = (1 + \epsilon' Y) \in G(k[\epsilon'])$, entonces $gg', g'g \in G(k'')$. Observemos tmabién que

$$gg' = 1 + \epsilon X + \epsilon' Y + \epsilon\epsilon' XY$$
$$g'g = 1 + \epsilon X + \epsilon' Y + \epsilon\epsilon' YX$$

Por lo tanto,

$$gg' = g'g(1 + \epsilon\epsilon'[X, Y])$$

Esto dice que $(1 + \epsilon\epsilon'[X, Y]) \in G(k'')$. Pero la subálgebra $k[\epsilon\epsilon']$ de k'' puede identificarse con $k[\epsilon]$ identificando las variable ϵ con $\epsilon\epsilon'$ ambas al cuadrado dan 0. Entonces, $(1 + \epsilon[X, Y]) \in G(k[\epsilon])$, es decir que $[X, Y] \in \mathfrak{g}$. $\square$

Ejemplo. El álgebra de Lie del grupo ortogonal es el conjunto de matrices tal que

$$1 = (1 + \epsilon X)(1 + \epsilon X)^t = 1 + \epsilon(X + X^t)$$

es decir que $X + X^t = 0$.

Ejercicio 3.1. a) Para $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, probar que los siguientes conjuntos son grupos algebraicos y dar explícitamente los polinomios que los determinan

$$SL(n, k) = \{g \in GL(n, k) \colon \det g = 1\}$$
$$SO(n, k) = \{g \in SL(n, k) \colon gg^t = 1\}$$
$$SP(n, k) = \left\{ g \in SL(2n, k) \colon g^t \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

b) Determinar cuáles son sus álgebras de Lie asociadas.

Ejercicio 3.2. a) Probar que

$$SU(n, \mathbb{C}) = \{g \in SL(n, \mathbb{C}) \colon gg^* = g\bar{g}^t = 1\}$$

es un grupo algebraico de matrices sobre $\mathbb{R}$.

b) Determinar su álgebra de Lie y denotémosla $\mathfrak{su}(n, \mathbb{C})$. Probar que es una $\mathbb{R}$-álgebra, pero no una $\mathbb{C}$-álgebra.

Observación:. Todo grupo algebraico de matrices es un grupo de Lie, pero la inversa no es cierta.

4. Construcción de nuevas álgebras de Lie.

Otro ejemplo particular de álgebra de Lie es $Der(A)$, el conjunto de derivaciones del álgebra A sobre k. Una *derivación* de A es una aplicación k-lineal $D \colon A \to A$

con la propiedad $D(x.y) = Dx.y + x.Dy$. Para que $[D, D'] = DD' - D'D$ sea un corchete de $\mathrm{Der}(A)$ tenemos que ver que $[D, D']$ es efectivamente una derivación,

$$\begin{aligned}
[D, D'](x.y) &= DD'(x.y) - D'D(x.y) \\
&= D(D'x.y + x.D'y) - D'(Dx.y + x.Dy) \\
&= DD'x.y + D'x.Dy + Dx.D'y + x.DD'y - D'Dx.y - Dx.D'y - D'x.Dy - x.D'Dy \\
&= DD'x.y - D'Dx.y + x.DD'y - x.D'Dy \\
&= [D, D']x.y + x.[D, D']y
\end{aligned}$$

Si consideramos el ejemplo dado para un álgebra de Lie, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.1. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Cada $x \in \mathfrak{g}$ define una aplicación* $\mathrm{ad}(x)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *por* $\mathrm{ad}(x)y = [x, y]$. *Entonces,*

(i) $\mathrm{ad}(x)$ *es una derivación de* $\mathfrak{g}$.

(ii) La aplicación $x \to \mathrm{ad}(x)$ *es un morfismo de Lie de* $\mathfrak{g}$ *en* $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

Demostración. Veamos (i),

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(x)([y, z]) &= [x, [y, z]] \\
&= -[y, [z, x]] - [z, [x, y]] \\
&= [[x, y], z] + [y, [x, z]] \\
&= [\mathrm{ad}(x)y, z] + [y, \mathrm{ad}(x)z]
\end{aligned}$$

Ahora veamos (ii),

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}[x, y](z) &= [[x, y], z] \\
&= -[y, [z, x]] - [[z, x], y]] \\
&= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \\
&= \mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y)z - \mathrm{ad}(y)\mathrm{ad}(x)z \\
&= [\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)](z) \qquad \square
\end{aligned}$$

Observación. La demostración del teorema anterior dice que tanto (i) como (ii) son equivalentes a la identidad de Jacobi.

A partir de álgebras de Lie conocidas podemos construir otras nuevas:

a) *Extensión por escalares:* Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre k y sea K un cuerpo que es un k-espacio vectorial (usando la noción más general de álgebra de Lie, una k-álgebra conmutativa y asociativa). El k-espacio vectorial $\mathfrak{g}_K = \mathfrak{g} \otimes_k K$ resulta ser un K-espacio vectorial (resp. una K-álgebra conmutativa y asociativa) donde $r.(x \otimes t) = x \otimes (rt)$ para todo $r, t \in K$ y $x \in \mathfrak{g}$. El álgebra $\mathfrak{g}_K$ resulta un álgebra de Lie con el corchete $[x \otimes t, y \otimes r] = [x, y] \otimes tr$.

Si $k = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$ la extensión de un álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ se denomina *la complexificación de* $\mathfrak{g}$.

b) *Álgebra de Lie cociente:* Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y J un ideal de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{g}/J$ es un álgebra de Lie con el corchete dado por $[x + J, y + J] = [x, y] + J$.

c) *Álgebra de Lie producto directo:* Sean $(\mathfrak{g}_i)_{i\in I}$ una familia de álgebras de Lie, entonces $\prod_{i\in I}\mathfrak{g}_i$ es un álgebra de Lie.

d) *Álgebra de Lie producto semidirecto:* Supongamos que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, que $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}$ es un ideal y que $\mathfrak{b}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{g}$ se dice producto semidirecto de $\mathfrak{b}$ por $\mathfrak{a}$ si la aplicación natural $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ induce un isomorfismo $\mathfrak{b}\to\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Como $\mathfrak{a}$ es un ideal, para cada $x\in\mathfrak{b}$ tenemos que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(x)\in Der(\mathfrak{a})$, es decir que define un morfismo de Lie $\theta\colon\mathfrak{b}\to Der(\mathfrak{a})$.

Teorema 2.2. *La estructura de $\mathfrak{g}$ como producto semidirecto queda determinada por $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ y el morfismo de Lie $\theta\colon\mathfrak{b}\to Der(\mathfrak{a})$.*

Demostración. Como k-módulo, $\mathfrak{g}$ es suma directa de $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$. Por otro lado, por ser el producto bilineal y anticonmutativo, sólo es necesario considerar el corchete $[x,y]$ cuando $x,y\in\mathfrak{a}$, cuando $x,y\in\mathfrak{b}$ y cuando $y\in\mathfrak{a}$ y $x\in\mathfrak{b}$. Por ser subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}$, en los dos primeros casos el corchete es preservado por la respectiva subálgebra. En el tercer caso tenemos que $[x,y]=\mathrm{ad}(x)y=\theta(x)y$.

Recíprocamente, dadas dos álgebras de Lie $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ y un morfismo de Lie $\theta\colon\mathfrak{b}\to Der(\mathfrak{a})$ se puede construir un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como producto semidirecto de $\mathfrak{b}$ por $\mathfrak{a}$ de modo que $\theta(x)=\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(x)$, donde $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(x)$ es la restricción de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ a $\mathfrak{a}$. Lo único que tenemos que comprobar es que vale la identidad de Jacobi

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$$

Como $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son álgebras de Lie, si x,y,z están los tres en alguna de las dos la identidad de Jacobi se satisface. Si $x,y\in\mathfrak{a}$ y $z\in\mathfrak{b}$

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=-[x,\theta(z)y]-[\theta(z)x,y]+\theta(z)[x,y]$$

y por el teorema anterior, eso es cero. Si $x\in\mathfrak{a}$ y $y,z\in\mathfrak{b}$

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=-\theta([y,z])x+\theta(y)\theta(z)x-\theta(z)\theta(y)x$$

y por ser θ un morfismo de Lie, esa suma es cero. □

Ejercicio 4.1. a) Probar que el álgebra de Lie de dimensión 3 del grupo de dilataciones y translaciones del plano (ejemplo 2), es producto semidirecto de

$$\mathfrak{a}=\left\{\begin{bmatrix}0&0&x\\0&0&y\\0&0&0\end{bmatrix}:x,y\in\mathbb{R}\right\}\qquad\mathfrak{b}=\left\{\begin{bmatrix}t&0&0\\0&t&0\\0&0&0\end{bmatrix}:t\in\mathbb{R}\right\}$$

b) Obtener un resultado similar para el álgebra de Lie del grupo de rotaciones y translaciones del plano dado en el ejemplo 3.

5. Álgebra envolvente o álgebra universal de $\mathfrak{g}$.

Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ consideremos el álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$ y definamos el álgebra cociente $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ bajo las siguientes relaciones

$$x\otimes y-y\otimes x-[x,y]=0\qquad\forall x,y\in\mathfrak{g}$$

Sea $\pi:T(\mathfrak{g})\to\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ el morfismo cociente de k-álgebras. Toda álgebra envolvente satisface la siguiente propiedad universal.

Propiedad Universal del Álgebra Envolvente. *Sea* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie e* $\iota : \mathfrak{g} \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ *la inclusión natural, entonces para cualquier álgebra asociativa* $(A, .)$ *y cualquier* $\eta : \mathfrak{g} \to A$ *un morfismo de álgebra de Lie, existe un único morfismo* $F : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to A$ *de* k*-álgebras asociativas tal que* $\eta = F \circ \iota$*.*

Demostración. Por la propiedad universal del álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$ tenemos que existe un único morfismo de álgebras asociativas $T : T(\mathfrak{g}) \to A$ tal que restringido a $\mathfrak{g}$ es igual a η. Como η es un morfismo de álgebras de Lie,

$$T([x, y]) = [T(x), T(y)] = T(x)T(y) - T(y)T(x) = T(x \otimes y - y \otimes x)$$

Por lo tanto, $T(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = 0$, es decir que el ideal $\mathcal{R}$ generado por esas relaciones está en el núcleo de T. Esto permite definir $F : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to A$ por $F(X + \mathcal{R}) = T(X) + \mathcal{R}$ para todo $X \in T(\mathfrak{g})$.

La unicidad sale de la unicidad de T, pues si hay otro morfismo $F' : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to A$, satisface también que $F' \circ \pi = F \circ \pi$, por lo tanto $F' = F$. $\square$

Observación:. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie conmutativa, $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ es exactamente el álgebra simétrica $S(\mathfrak{g})$.

El álgebra envolvente tiene una filtración ascendente proveniente de la filtración ascendente del álgebra tensorial. Más precisamente, $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})_n = \pi(\sum_{i=1}^n T^i(\mathfrak{g}))$.

Como hemos observado en el Apéndice, toda filtración da origen a una graduación. Denotemos $gr_n\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ los espacios de la graduación así obtenida.

Ejercicio 5.1. Probar que π induce una aplicación lineal $T(\mathfrak{g}) \to gr\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ que resulta un morfismo de k-álgebras y pasando al cociente da lugar a otro $S(\mathfrak{g}) \to gr\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ que también es de k-álgebras.

6. Representaciones y módulos.

La importancia de las representaciones de las álgebra de Lie o de un grupo algebraico o de un grupo de Lie es que esa es en la forma en que aparecen en la realidad, a través de sus representaciones. Cada vez que vemos en un espacio vectorial alguna simetría, estamos viendo la acción de un grupo.

Por ejemplo, concideremos el grupo de rotaciones del plano, sabemos que son las transformaciones lineales del tipo

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Este conjunto es isomorfo al grupo $O(2)$. Esta manera de ver este grupo hace referencia a que actúa en los puntos del plano rotándolos en un ángulo θ en sentido antihorario. Es decir, estamos representando al grupo de acuerdo a la manera en que actúa en un espacio vectorial. En este sentido podemos representar al álgebra de Lie asociada a $O(2)$ por las transformaciones lineales del tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{bmatrix}$$

Que es isomorfa a $\mathfrak{so}(2)$. Aquí también la estamos identificando con la forma en que actúa en los puntos del plano.

La pregunta que surge naturalemente es ¿Hay una única manera de representar un grupo o un álgebra de Lie de acuerdo a su acción en un espacio vectorial? ¿Hay algunas representaciones particulares tales que todas las otras se pueden expresar en términos de ellas? Reconocer una representación nos dice qué estructura hay detrás y se puede aplicar la teoría conocida para resolver el problema específico de las aplicaciones. Las representaciones de grupos y álgebras de Lie aparecen en realidad en forma más frecuente de lo que uno imagina, aparecen en la relatividad general, en física cuántica, en la dinámica de fluídos, en la química, etc.

En esta sección consideraremos que k es un cuerpo y que las álgebras de Lie son de dimensión finita.

Definición. *Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, un $\mathfrak{g}$-módulo es un k-espacio vectorial V junto con una aplicación k-bilineal*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \times V &\to V \\ (x, v) &\to xv \end{aligned}$$

que satisface la condición $[x, y]v = xyv - yxv$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$ y $v \in V$.

El correspondiente morfismo $\pi\colon \mathfrak{g} \to End(V)$ junto con el espacio de la representación V definen un par (π, V) que se denomina representación de $\mathfrak{g}$.

Ejemplos. 1. Un espacio vectorial V se puede mirar como un $\mathfrak{g}$-módulo bajo la *acción trivial* $xv = 0$ para todo $v \in V$ y $x \in \mathfrak{g}$.

2. En el ejemplo del álgra de Lie del grupo de rotaciones del plano tenemos que

$$\begin{aligned} &\mathfrak{so}(2) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ &\left(\begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) \to \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta y \\ -\theta x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. Generalizando la situación del ejemplo anteior, si $\mathfrak{g}$ una subálgebra de Lie de $M(n, k)$, entonces $V = k^n$ es un $\mathfrak{g}$-módulo bajo la acción usual.

4. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, entonces $V = \mathfrak{g}$ es un $\mathfrak{g}$-módulo bajo la acción $\mathrm{ad}(x)y = [x, y]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Efectivamente $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ es una representación por Teorema 2.1 llamada la *representación adjunta.*

A partir de $\mathfrak{g}$-módulos conocidos podemos construir otros:

a) *Suma directa:* Sean V_1 y V_2 dos $\mathfrak{g}$-módulos, el producto tensorial $V_1 \oplus V_2$ tiene una estructura de $\mathfrak{g}$-módulo de modo que

$$x(v_1, v_2) = (xv_1, xv_2) \qquad \forall x \in \mathfrak{g}, v_i \in V_i$$

b)*Producto tensorial:* Sean V_1 y V_2 dos $\mathfrak{g}$-módulos, el producto tensorial $V_1 \otimes V_2$ tiene una única estructura de $\mathfrak{g}$-módulo de modo que

$$x(v_1 \otimes v_2) = (xv_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (xv_2)$$

c) *Espacio de homomorfismo:* Dados dos $\mathfrak{g}$-módulos V_1 y V_2, el espacio de transformaciones k-lineales $\mathrm{Hom}_k(V_1, V_2)$ tiene la siguiente estructura de $\mathfrak{g}$-módulo: $(xf)(v_1) = x(f(v_1)) - f(xv_1)$ para todo $x \in \mathfrak{g}$ y todo $v_1 \in V_1$.

Dado un $\mathfrak{g}$-módulo V un $\mathfrak{g}$-*submódulo* W de V es un subespacio de V cerrado bajo la acción de $\mathfrak{g}$, es decir $xw \in W$ para todo $w \in W$ y todo $x \in \mathfrak{g}$. En este caso se dice que si (π, V) es la representación asociada al $\mathfrak{g}$-módulo V, (π, W) es una *subrepresentación* de (π, V).

Ejercicio 6.1. Si (π, V) es una representación de $\mathfrak{g}$ probar que $(\tilde{\pi}, V/U)$ es también una representación, llamada *representación cociente*, si U es un $\mathfrak{g}$-submódulo de V y $\tilde{\pi}(x + U) = \pi(x)v + U$.

Proposición 6.1. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, son equivalentes*

(i) (π, V) es una representación de $\mathfrak{g}$;

(ii) la aplicación lineal $\tilde{\pi}$ dada por

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) & \to & \mathrm{End}(V) \\ u = \{x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_s\} & \to & (v \to \tilde{\pi}(u)v = \tilde{\pi}(x_1)\tilde{\pi}(x_2)\ldots\tilde{\pi}(x_s)v) \end{array}$$

es un morfismo de álgebras

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Se obtiene inmediatamente a partir de la propiedad universal del álgebra envolvente.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Se obtine definiendo $\pi = \tilde{\pi}|_{\mathfrak{g}}$ pues para comprobar que es compatible con el corchete se tiene que

$$\pi([x, y]) = \tilde{\pi}(x \otimes y - y \otimes x) = \pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x) = [\pi(x), \pi(y)] \quad \square$$

Proposición 6.2. *(i) Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, su álgebra envolvente $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ admite una única estructura de $\mathfrak{g}$-módulo tal que la representación associada $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ satisface:*

1. $\rho|_{\mathfrak{g}} = \mathrm{ad}$;

2. $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}))$.

También la llamaremos representación adjunta.

(ii) Si V es un $\mathfrak{g}$-módulo, $\mathfrak{g}$ actúa por derivaciones en $S(V)$ y como $\mathfrak{g}$-módulo es un módulo trivial.

Demostración. (i) La unicidad de la representación sale del hecho que $\mathfrak{g}$ genera $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ como álgebra asociativa. Para probar la existencia tenemos que ver que es compatible con la relación de equivalencia de definición de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Sean $x, y, z \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} \rho(z)(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) &= [z, x] \otimes y + x \otimes [z, y] - [z, y] \otimes x - y \otimes [z, x] - [z, [x, y]] \\ &= [z, x] \otimes y - y \otimes [z, x] - [[z, x], y] + [z, y] \otimes x - x \otimes [z, y] - [x, [z, y]] \quad \square \end{aligned}$$

7. Submódulos invariantes.

Dado un $\mathfrak{g}$-módulo V se dice que un elemento $v \in V$ es $\mathfrak{g}$-*invariante* si $xv = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. La terminología proviene del significado a nivel de grupo pues es equivalente a que $(1 + \epsilon x)v = v$.

Ejercicio 7.1. Probar que el conjunto de todos los elementos $\mathfrak{g}$-invariantes de V es un submódulo.

Una forma bilineal $B \colon V \times V \to k$ se dice *invariante* si

$$B(xv, w) + B(v, xw) = 0$$

Observemos que a nivel de grupo, si $g = 1 + \epsilon x$ la condición se convierte en $B(gv, gw) = B(v, w)$.

Teorema 7.1. *Dada* (π, V) *una representación de* $\mathfrak{g}$ *siempre existe una forma bilineal simétrica en* $\mathfrak{g}$ *invariante por la representación adjunta de* $\mathfrak{g}$ *dada por* $B_\pi(x, y) = \mathrm{Tr}(\pi(x)\pi(y))$.

Demostración. B_π es simétrica pues $\mathrm{Tr}(ST) = \mathrm{Tr}(TS)$ para todo $S, T \in \mathrm{End}(V)$. Veamos que es invariante por la adjunta

$$\begin{aligned}
B_\pi(\mathrm{ad}(z)x, y) + B_\pi(x, \mathrm{ad}(z)y) &= \mathrm{Tr}(\pi([z, x])\pi(y)) + \mathrm{Tr}(\pi(x)\pi([z, y])) \\
&= \mathrm{Tr}([\pi(z), \pi(x)]\pi(y)) + \pi(x)[\pi(z), \pi(y)])) \\
&= \mathrm{Tr}(\pi(z)\pi(x)\pi(y) - \pi(x)\pi(z)\pi(y)) + \pi(x)\pi(z)\pi(y) - \pi(x)\pi(y)\pi(z))) \\
&= \mathrm{Tr}(\pi(z)\pi(x)\pi(y)) - \mathrm{Tr}(\pi(x)\pi(y)\pi(z))) \\
&= \mathrm{Tr}(\pi(x)\pi(y)\pi(z)) - \mathrm{Tr}(\pi(x)\pi(y)\pi(z))) \\
&= 0 \qquad \square
\end{aligned}$$

Definición. *La forma de Killing es la forma bilineal simétrica invariante de* $\mathfrak{g}$ *dada por* $B(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y))$.

Ejercicio 7.2. Para $\mathfrak{sl}(2, k)$

a) probar que $B(X, Y)$ es un múltiplo de $\mathrm{Tr}(XY)$. Calcular dicho múltiplo (*Ayuda:* Usar una base apropiada);

b) probar que $B(1 + \epsilon X, 1 + \epsilon X)$ es un múltiplo del $\det X$.

Ejercicio 7.3. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real, es decir $k = \mathbb{R}$, probar que:

a) $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{g} + i\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie compleja.

b) $B^{\mathbb{C}}|_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} = B$ donde B es la forma de Killing de $\mathfrak{g}$ y $B^{\mathbb{C}}$ la de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Ejercicio 7.4. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real de matrices complejas con la propiedad que si $0 \neq X \in \mathfrak{g}$ entonces $iX \notin \mathfrak{g}$.

a) Probar que $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ puede realizarse como un álgebra de Lie de matrices complexificando las entradas de los elementos de $\mathfrak{g}$.

b) Usar a) para probar que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ y $\mathfrak{su}(2, \mathbb{C})$ tienen complexificaciones isomorfas.

c) Probar que en $\mathfrak{su}(2, \mathbb{C})$ la forma de Killing es definida negativa y que en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ hay elementos tales que $B(X, X) > 0$.

d) Probar que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ y $\mathfrak{su}(2, \mathbb{C})$ no son isomorfas.

8. Álgebras de Lie nilpotentes.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre el cuerpo k y sea V un espacio vectorial de dimensión finita.

Podemos definir una cadena descendente de ideales de $\mathfrak{g}$ de la siguiente manera

$$C^1\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \supset C^2\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^1\mathfrak{g}] \supset C^3\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^2\mathfrak{g}] \supset \dots$$

Debemos entender que cuando hablamos del corchete entre dos subálgebras de Lie $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ nos referimos a la subálgebra generada por los elementos $[x_1, x_2]$ para todo $x_i \in \mathfrak{h}_i$.

Ejercicio 8.1. Probar que $[C^r\mathfrak{g}, C^s\mathfrak{g}] \subset C^{r+s}\mathfrak{g}$.

Teorema 8.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Existe un entero n tal que $C^n\mathfrak{g} = 0$.

(ii) Existe un entero n tal que

$$[x_1, [x_2, [\dots [x_{n-1}, x_n] \dots]]] = \mathrm{ad}(x_1)\mathrm{ad}(x_2)\dots \mathrm{ad}(x_{n-1})x_n = 0$$

para todo $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{g}$.

(iii) $\mathfrak{g}$ es una sucesiva extensión central de álgebras de Lie abelianas, es decir que existe una cadena de ideales $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \dots \mathfrak{a}_n = 0$ tal que $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$ es el centro de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_{i+1}$, o dicho de otra manera, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_i] \subset \mathfrak{a}_{i+1}$ para todo i.

Ejercicio 8.2. Demostrar el Teorema 5.1 de la forma $(i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$ y probar que si los ideales a_i son como en (iii) entonces $C^i\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}_i$ para todo i.

Definición. *Si $\mathfrak{g}$ satisface las condiciones del Teorema 5.1, $\mathfrak{g}$ se dice nilpotente.*

Ejemplos. 1. El subconjunto de matrices $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : t \in k \right\}$ es un álgebra de Lie nilpotente.

2. El álgebra de Heisenberg dada como ejemplo de álgebra de Lie de dimensión 3 en §1.

Recordemos que $N \in \mathrm{End}(V)$ se dice nilpotente si existe un natural n tal que $N^n = 0$. Definamos *bandera* de V a una sucesión $F : 0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$ de subespacios vectoriales de V tal que $\dim V_i = i$.

Ejercicio 8.3. Justifique por qué todo endomorfismo nilpotente de V determina una bandera F de V tal que $NV_i \subset V_{i-1}$.

Ejercicio 8.4. Sea V un espacio vectorial y $F : 0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$ una bandera de V. Probar que:

a) $\mathfrak{u}(F) = \{u \in \mathrm{End}(V) \colon uV_i \subset V_{i-1} \text{ para todo } i \geq 1\}$ es un álgebra de Lie con el corchete usual de $\mathrm{End}V$;

b) $\mathfrak{u}(F)$ es isomorfa a una subálgebra de matrices triangulares superiores estrictas (con ceros en la diagonal);

c) $\mathfrak{u}(F)$ es nilpotente (*Ayuda:* Usar Teorema 5.1 (iii) considerando los ideales $\mathfrak{u}_k(F) = \{u \in \mathrm{End}(V) \colon uV_i \subset V_{i-k} \text{ para todo } i \geq k\}$).

Ahora podremos justificar la nomenclatura dada a las álgebras de Lie con las propiedades del Teorema 8.1.

Teorema 8.2. *$\mathfrak{g}$ es nilpotente si y sólo si $\mathrm{ad}x$ es nilpotente para cada $x \in \mathfrak{g}$.*

Antes de demostrar el Teorema 8.2 consideremos el Teorema de Engel.

Teorema 8.3 (Engel). *Sea $\pi \colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ una representación de $\mathfrak{g}$ tal que $\pi(x)$ es nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$. Entonces existe una bandera F de V tal que $\pi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{u}(F)$.*

La recíproca es trivial pues $\mathfrak{u}(F)$ es nilpotente. De acuerdo al Ejercicio 8.3, el significado del Teorema de Engel es el siguiente: si para cada $x \in \mathfrak{g}$ existe una bandera F_x tal que $\pi(x)V_{x,i} \subset V_{x,i=1}$ entonces existe una bandera F que funciona para todos los x simultáneamente.

Otra versión de este teorema es:

Teorema 8.4. *Sea $\pi\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V)$ una representación de $\mathfrak{g}$ tal que $\pi(x)$ es nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$. Si $V \neq 0$, entonces existe un vector no nulo $v \in$ tal que $\pi(x)v = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

Si vale el Teorema 8.3, dado cualquier $v \in V_1$ se tiene que $\pi(x)v \in V_0 = 0$. Si vale el Teorema 8.4, usando inducción en la $\dim V$ se deduce inmediatamente el Teorema 8.3. En efecto, para $\dim V = 1$ no hay nada que probar y si vale para $\dim V = n-1$ consideremos $W = V/kv$ que tiene dimensión $n-1$. Por hipótesis inductiva W tiene una bandera que induce una bandera en V con las propiedades requeridas.

Para una demostración del Teorema 8.4 ver [S].

Demostración del Teorema 8.2. Si $\mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces $\operatorname{ad}(x)$ es nilpotente por Teorema 8.1 (ii).

Recíprocamente, si $\operatorname{ad}(x)$ es nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$, el Teorema de Engel aplicado a la representación adjunta dice que existe una bandera $0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_n = \mathfrak{g}$ de subespacios de $\mathfrak{g}$ tales que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_i] \subset \mathfrak{a}_{i-1}$ para todo i. Por lo tanto $\mathfrak{g}$ es nilpotente por Teorema 8.1 (iii).

Se puede plantear un teorema análogo al Teorema de Engel a nivel de grupos algebraicos de matrices. Para ello consideraremos V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo k. Un elemento $g \in GL(V)$ se dice *unipotente* alguna de las siguientes condiciones que resultan equivalentes entre sí.

(i) $g = 1 + N$ con N nilpotente;

(ii) en una base apropiada g es una matriz triangular superior con 1's en la diagonal.

(iii) 1 es el único autovalor de g.

Teorema 8.5 (Kolchin). *Sea G un subgrupo de $GL(V)$ tal que todo elemento $g \in G$ es unipotente. Entonces, existe una bandera $F = \{V_i\}$ de V tal que $GV_i = V_i$.*

En otras palabras el Teorema de Kolchin dice que hay una base enla cual todos los elementos de G se representan simultáneamente como matrices triangulares superiores con 1's enla diagonal.

Demostración. Suponiendo que $V \neq 0$, si probamos que existe $0 \neq v \in V$ dejado fijo por todo el grupo G, haciendo inducción en la $\dim V$ se obtiene el resultado esperado.

Para probar la afirmación anterior consideremos la ecuación lineal $(g-1)v = 0$ para $g \in G$. Tendrá solución no trivial v sobre k si y sólo si tiene una sobre $\bar{k}$ la clausura algebraica de k, es decir en $V \otimes_k \bar{k}$. Por lo tanto podemos suponer que k es algebraicamente cerrado. Más aún, reemplazando V por un G-submóldulo podemos suponer que V es simple (no contiene submódulos propios no trivial). Usaremos el Teorema de Burnside [BA, Cap. 8, §4.3], que dice que si $\dim V < \infty$, k algebraicamente cerrado, V un A-módulo simple con A una subálgebra de $\operatorname{End}(V)$, entonces $A = \operatorname{End}(V)$. Por lo tanto, como los elementos de G generan linealmente la k-subálgebra $A = \sum_{g \in G} kg$ tenemos que G genera todo $\operatorname{End}_k V$.

Por otro lado, para cada $g = 1 + N \in G$ se tiene que $\operatorname{Tr} g = \operatorname{Tr} 1 + \operatorname{Tr} N = \operatorname{Tr} 1$ por ser N nilpotente ya que su único autovalor es el 0. Eso dice que la traza de g es independiente de $g \in G$. Además para cada $h \in G$, $\operatorname{Tr}(Nh) = \operatorname{Tr}((g -$

$1)h) = \mathrm{Tr}(gh) - \mathrm{Tr}(h) = 0$. Como h genera todo $\mathrm{End}_k V$, $\mathrm{Tr}(NX) = 0$ para todo $X \in \mathrm{End}_k V$, por lo tanto $N = 0$ y $g = 1$. Esto es lo que queríamos probar, que G actúa trivialmente en V. $\square$

§9. Álgebras de Lie solubles.

Podemos definir otra cadena descendente de ideales de $\mathfrak{g}$ de la siguiente manera

$$D^1\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \supset D^2\mathfrak{g} = [D^1\mathfrak{g}, D^1\mathfrak{g}] \supset D^3\mathfrak{g} = [D^2\mathfrak{g}, D^2\mathfrak{g}] \supset \dots$$

Teorema 9.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
(i) Existe un entero n tal que $D^n\mathfrak{g} = 0$.
(ii) Existe un entero n tal que

$$[[\dots[[x_1, y_1], [x_2, y_2]], \dots], [\dots, [[x_{n-1}, y_{n-1}], [x_n, y_n]], \dots]] = 0$$

para todo $x_i, y_i \in \mathfrak{g}$.
(iii) $\mathfrak{g}$ es una sucesiva extensión de álgebras de Lie abelianas, es decir que existe una cadena de ideales $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \dots \mathfrak{a}_n = 0$ tal que $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$ es abeliana, o dicho de otra manera, $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i] \subset \mathfrak{a}_{i+1}$ para todo i.

Ejercicio 9.1. Demostrar el Teorema 6.1 de la forma $(i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$.

Definición. *Si $\mathfrak{g}$ satisface las condiciones del Teorema 6.1, $\mathfrak{g}$ se dice soluble.*

Ejemplos. 1. Toda álgebra de Lie nilpotente es soluble pues $D^i\mathfrak{g} \subset C^i\mathfrak{g}$ para todo i.

2. El subconjunto de matrices $\left\{ \begin{bmatrix} a & t \\ 0 & b \end{bmatrix} : t \in k \right\}$ es un álgebra de Lie soluble.

3. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $F : 0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$ una bandera de V. El álgebra de Lie $\mathfrak{b}(F) = \{u \in \mathrm{End}(V) \colon uV_i \subset V_i \text{ para todo } i\}$ es un álgebra de Lie con el corchete usual de $\mathrm{End}V$. En efecto, eligiendo una base apropiada compatible con la bandera F se deduce que $\mathfrak{b}(F)$ consiste de matrices triangulares. Como el cociente $\mathfrak{b}(F)/\mathfrak{u}(F)$ es abeliana, $\mathfrak{b}(F)$ resulta soluble.

Ejercicio 9.2. Probar que el álgebra de Lie del grupo de translaciones y dilataciones del plano dada como ejemplo de álgebra de Lie de dimensión 3 en §1 es soluble.

El Teorema Lie es el más importante sobre álgebras de Lie solubles.

Teorema 9.1 (Lie). *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie soluble sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0 y sea (π, V) una representación de $\mathfrak{g}$. Entonces existe una bandera F de V tal que $\pi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{b}(F)$.*

Por inducción el Teorema de Lie se reduce a:

Teorema 9.2. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie soluble sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0 y sea (π, V) una representación de $\mathfrak{g}$. Si $V \neq 0$ existe $0 \neq v \in V$ tal que v es un autovector de $\pi(x)$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

Para una demostración del Teorema 9.2 ver [S].

Notemos que un autovector v como del Teorema 9.2, determina una aplicación $\lambda\colon \mathfrak{g} \to k$ tal que $\pi(x)v = \lambda(x)v$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

El Teorema de Lie es falso si la caracteística de k es distinta de 0. En efecto, cosideremos $\mathfrak{sl}(2,k)$ tal que car$k=2$, es nilpotente y sin embargo si consideramos la representación usual en k^2 no hay un autovector común a todos los endomorfismos dados por la representación.

Ejercicio 9.3. Probar que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie soluble sobre un cuerpo algebraicamente cerrado tal que car$k=0$, entonces $\mathfrak{g}$ tiene una bandera de ideales.

Como consecuencia del Teorema de Lie tenemos el siguiente resultado.

Corolario 9.3. *si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie sobre k,* car$k=0$*, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble si y sólo si $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ es nilpotente.*

Demostración. La vuelta es inmediata pues $D^i\mathfrak{g}\subset C^i\mathfrak{g}$ para todo i.

Observemos que no es necesario pedir que el cuerpo sea algebraicamente cerrado pues si k' es una extensión de k y $\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}\otimes_k k'$, entonces es evidente que $\mathfrak{g}$ es soluble(resp. nilpotente) si y sólo si $\mathfrak{g}'$ es soluble(resp. nilpotente). Si $\mathfrak{g}$ es soluble, el ejercicio 9.3 nos asegura que hay una bandera $0=\mathfrak{g}_n\subset\mathfrak{g}_{n-1}\subset\cdots\subset\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}$ de ideales de $\mathfrak{g}$. Es decir que los endomorfismo de ad$\mathfrak{g}$ triangularizan simultáneamente en una base apropiada. Si $[x,y]\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, como $\mathrm{ad}([x,y])=[\mathrm{ad}(x),\mathrm{ad}(y)]$ en esa base corresponde a una matriz triangular superior estricta, es decir $\mathrm{ad}([x,y])\mathfrak{g}_i\subset\mathfrak{g}_{i+1}$. Por lo tanto $\mathrm{ad}([x,y])$ es nilpotente para todo x e y, es decir $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ lo es. □

Un elemento $u\in\mathrm{End}_k(V)$ se dice *semisimple* si es diagonalizable, es decir si tiene una base de autovectores.

El siguiente es el conocido resultado de álgebra lineal para cuerpos algebraicamente cerrados y de característica 0.

Teorema 9.5 (Descomposición de Jordan). *Para cada $u\in\mathrm{End}_k(V)$ existen un endomorfismo semisimple s y otro nilpotente n tal que $u=s+n$ y $sn=ns$. Esta descomposición es única bajo esas condiciones y existen polinomios P y Q con término independiente nulo tales que $P(u)=s$ y $Q(u)=n$.*

El siguiente es un importante criterio de solubilidad.

Teorema 9.6 (Criterio de Solubilidad de Cartan). *Sea k un cuerpo de caracterí stica 0 y $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita. Entonces, $\mathfrak{g}$ es soluble si y sólo si la forma de Killing B satisface $B(x,y)=0$ para todo $x\in\mathfrak{g}$ e $y\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.*

Ejercicio 9.4. Demostrar para $k=\mathbb{C}$ la parte ($\Leftarrow$) del Criterio de Solubilidad de Cartan usando el Corolario 9.3. Probar por el absurdo que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ es nilpotente bajo las condiciones del teorema, para ello usar la descomposición de Jordan $\mathrm{ad}(y)=s+n$ y analizar $\mathrm{Tr}(\bar{s}\mathrm{ad}(y))$ donde $\bar{s}$ es el endomorfismo conjugado a s.

Para una demostración completa del Teorema 9.4 ver [K] o [S].

Ejercicio 9.5. Clasificación de las álgebras de Lie solubles de dimensión 3 sobre $\mathbb{R}$:

a) Caracterizar las álgebras de Lie solubles tales que $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=1$. Probar que el álgebra de Heisenberg es una de ellas.

b) Si $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=2$ usar el ejercicio 6.3 para mostrar que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ es abeliana. Sean x,y una base de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ y x,y,z una de $\mathfrak{g}$. Sean $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ tales que

$$[x,z]=ax+by \qquad [y,z]=cx+dy$$

Mostrar que $\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ es no singular. Observar además que las álgebras del ejercicio 2.8 son de este tipo, por lo tanto hay una cantidad no numerable de álgebras de Lie solubles no isomorfas de dimensión 3.

c) Concluir que las únicas álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 3 sobre $\mathbb{R}$ son salvo isomorfismo las abelianas y el álgebra de Heisenberg.

Ejercicio 9.6. Probar que la clase de álgebras de Lie nilpotentes (resp. solubles) es cerrada por el cociente, subálgebras, productos y extensiones.

§10. Álgebras de Lie semisimples.

En esta sección consideraremos k un cuerpo algebraicamente cerrado de caracteística 0. Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita.

Dados dos ideales solubles $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ es soluble pues $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{b}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$ es una extensión por $\mathfrak{a}$. Por lo tanto, existe un ideal soluble que contiene a todos los demás ideales solubles de $\mathfrak{g}$.

Definición. *El radical de $\mathfrak{g}$ es $\mathfrak{r}$ el mayor ideal soluble, es decir que contiene a todos los ideales solubles de $\mathfrak{g}$.*

Definición. *El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice semisimple si $\mathfrak{r} = 0$, es decir no tiene ideales solubles no nulos.*

Otro criterio de semisimplicidad es el siguiente.

Teorema 10.1 (Criterio de Semisimplicidad de Cartan). *El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es semisimple si y sólo si la forma de Killing es no degenerada.*

Demostración. Sea $\mathfrak{u} = \{x \in \mathfrak{g} \colon B(x,y) = 0 \text{ para todo } y \in \mathfrak{g}\}$. Es fácil ver que $\mathfrak{u}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. En particular, $B(x,y) = 0$ para todo $y \in D\mathfrak{u} = [\mathfrak{u},\mathfrak{u}]$, lo que dice que $\mathfrak{u}$ es soluble por el Criterio de Solubilidad de Cartan. Por lo tanto, si $\mathfrak{g}$ es semisimple, $\mathfrak{u} = 0$.

Para ver la recíproca, cosideremos $\mathfrak{a}$ un ideal abeliano en $\mathfrak{g}$. Veamos que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{u}$. En efecto, dados $x \in \mathfrak{a}$ e $y \in \mathfrak{g}$, $\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y)\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$ y $\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y)\mathfrak{a} = 0$, por lo tanto $(\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y))^2 = 0$ y $B(x,y) = 0$. □

Teorema 10.2. *Sea $\mathfrak{g}$ semisimple y $\mathfrak{a}$ un ideal de $\mathfrak{g}$. Sea $\mathfrak{a}^\perp$ el espacio ortogonal a $\mathfrak{a}$ con respecto a la forma de Killing de $\mathfrak{g}$. Entonces $\mathfrak{a}^\perp$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}\oplus\mathfrak{a}^\perp$.*

Demostración. Por ser la forma de Killing invariante, $\mathfrak{a}^\perp$ resulta un ideal de $\mathfrak{g}$. Por otro lado, usando el Criterio de Solubilidad de Cartan, se obtiene que $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^\perp$ es soluble. Por lo tanto $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^\perp = 0$. □

Corolario 10.3. *Toda álgebra de Lie semisimple es producto de álgebras de Lie simples.*

Ejercicio 10.1. Demostrar el Corolario 10.3.

Si $\mathfrak{s}$ es un álgebra de Lie simple es inmediato que $\mathfrak{s} = [\mathfrak{s},\mathfrak{s}]$. Esto asegura que:

Corolario 10.4. *Si $\mathfrak{g}$ es semisimple entonces $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.*

Corolario 10.5. *Si $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{a}_i$ es una expresión de $\mathfrak{g}$ como suma de ideales simples, entonces cualquier ideal de $\mathfrak{g}$ es suma de algunos de los $\mathfrak{a}_i$.*

Ejercicio 10.2. Demostrar el Corolario 10.5.

Ejercicio 10.3. Probar que todas las álgebras de Lie del ejercicio 3.1 son simples para $k = \mathbb{C}$ salvo, en algunos casos, para alguna dimensión pequeña.

Todas las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$ están clasificadas. Las llamadas álgebras de Lie clásicas son las cuatro familias del ejercicio 10.3 y las excepcionales son exactamente cinco álgebras de Lie llamadas E_6, E_7, E_8, F_4 y G_2.

§8. Reducibilidad completa.

En esta sección continuaremos asumiendo que k un cuerpo algebraicamente cerrado de caracteística 0 y V un k-espacio vectorial de dimensión finita.

Definición. *Un $\mathfrak{g}$-módulo V (resp. una representación (π, V)) se dice simple (resp. irreducible) si $V \neq 0$ y V sus únicos submódulos son 0 y V.*

V (resp. (π, V)) se dice semisimple (resp. completamente reducible) si V es suma directa de submódulos simples, o equivalentemente, todo submódulo de V tiene un submódulo complementario.

Observemos que $\mathfrak{g}$ puede ser semisimple como $\mathfrak{g}$-módulo sin ser semisimple como álgebra de Lie. Ejemplo de ello es $\mathfrak{g} = k$.

Teorema 8.1 (Weyl). *Si $\mathfrak{g}$ es semisimple toda representación de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ es completamente reducible.*

Por una demostración ver [S].

Corolario 8.2. *Sea $\mathfrak{g}$ un ideal semisimple de $\mathfrak{q}$, entonces existe un único ideal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{q}$ tal que $\mathfrak{q} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}$.*

Demostración. Aplicando la completa reducibilidad a la representación $(\mathrm{ad}|_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{q})$ de $\mathfrak{g}$ se obtiene un k-subespacio complementario a $\mathfrak{q}$ que es estable por $\mathrm{ad}(x)$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Veamos que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = 0$. En efecto, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{g} \cap \mathfrak{a}$ por ser $\mathfrak{g}$ un ideal y ser $\mathfrak{a}$ estable por la acción de $\mathfrak{g}$. Es decir que $\mathfrak{a} = \{y \in \mathfrak{q} \colon [\mathfrak{g}, y] = 0\}$ pues escribiendo $y = x + a$ con $x \in \mathfrak{g}$ y $a \in \mathfrak{a}$ se tiene que $[\mathfrak{g}, y] = [\mathfrak{g}, x]$ y $[\mathfrak{g}, x] = 0$. Por lo tanto, $x = 0$ pues $\mathfrak{g}$ tiene centro 0. Eso dice que $\mathfrak{a}$ es único, incluso como $\mathfrak{g}$-módulo, y también que $\mathfrak{a}$ es un ideal en $\mathfrak{q}$ porque ser el anulador del $\mathfrak{q}$-módulo $\mathfrak{g}$. $\square$

Definición. *Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice reductiva si todo ideal $\mathfrak{a}$ de tiene un ideal complemetario $\mathfrak{b}$, es decir $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$.*

Ejercicio 8.1. Probar que toda álgebra de Lie reductiva tiene una descomposición $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus Z_{\mathfrak{g}}$ donde $Z_{\mathfrak{g}}$ es el centro de $\mathfrak{g}$.

Corolario 8.3. *Si $\mathfrak{g}$ es semisimple entonces toda derivación de $\mathfrak{g}$ es de la forma $\mathrm{ad}(x)$ para algún $x \in \mathfrak{g}$.*

Demostración. Podemos aplicar el Corolario 8.2 a $\mathfrak{q} = \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ pues $\mathfrak{g}$ es un ideal de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ ya que si $x \in \mathfrak{g}$ y $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ tenemos que $[D, \mathrm{ad}(x)] = \mathrm{ad}(Dx)$. Por lo tanto, $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$ donde $\mathfrak{a}$ consiste de las derivaciones que conmutan con $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$. Sea $D \in \mathfrak{a}$, $\mathrm{ad}(Dx) = [D, \mathrm{ad}(x)] = 0$, lo que dice que $Dx = 0$ pues el centro de $\mathfrak{g}$ es cero. Entonces $\mathfrak{a} = 0$. $\square$

Apéndice

A. Álgebra tensorial.

En esta sección definiremos el producto tensorial entre espacios vectoriales que trae una estructura natural de espacio vectorial. Como así también su generalización natural entre módulos sobre un anillo conmutativo k con unidad. A partir del producto tensorial definiremos el álgebra tensorial.

Definición. *Dados dos espacios vectoriales V y W sobre el cuerpo k, se define el producto tensorial $V \otimes_k W$ al k-espacio vectorial generado por el conjunto de clases de equivalencias de $V \times W$ determinadas por las siguientes relaciones:*
(i) $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \quad \forall v_1, v_2 \in V\ ,\ w \in W;$
(ii) $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \quad \forall v \in V\ ,\ w_1, w_2 \in W;$
(iii) $cv \otimes w = v \otimes cw = c(v \otimes w) \quad \forall v \in V\ ,\ w \in W,\ c \in k.$

Esto determina una aplicación bilineal

$$\begin{aligned} \phi : V \times W &\to V \otimes_k W \\ (v, w) &\to v \otimes w \end{aligned}$$

que satisface la siguiente propiedad universal:

Propiedad Universal del Producto Tensorial. *Sean V y W k-espacios vectoriales, para cualquier otro k-espacio vectorial U y cualquier aplicación bilineal $\psi : V \times W \to U$ existe una única transformación lineal $T : V \otimes_k W \to U$ tal que $\psi = T \circ \phi$.*

Demostración. Para demostrar esta propiedad tenemos que construir la transformación lineal T y ver que es única. Dados $v \in V$ y $w \in W$ definamos $T(v \otimes w) = \psi(v, w)$ y extendamos T a todo $V \otimes_k W$ linealmente. Es fácil ver que T está bien definida. En efecto,

$$\begin{aligned} T((v_1 + v_2) \otimes w) &= \psi(v_1 + v_2, w) = \psi(v_1 \otimes w) + \psi(v_2 \otimes w) \\ &= T(v_1 \otimes w) + T(v_2 \otimes w) = T(v_1 \otimes w + v_2 \otimes w) \end{aligned}$$

En la otra entrada la demostración es similar y para la multiplicación por un escalar se tiene que

$$T((cv) \otimes w) = \psi(cv, w) = c\psi(v, w) = \psi(v, cw) = T(v \otimes (cw))$$

Para probar la unicidad supongamos que S satisface la misma propiedad que T, entonces

$$S(v \otimes w) = \psi(v, w) = T(v \otimes w)$$

Por lo tanto,

$$S(\sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i) = \sum_{i=1}^{r} S(v_i \otimes w_i) = \sum_{i=1}^{r} T(v_i \otimes w_i) = T(\sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i),$$

quedando demostrada la unicidad. □

Cuando no de motivo a confusiones, denotaremos $V \otimes_k W$ directamente por $V \otimes W$ omitiendo el cuerpo k.

Esta noción de producto tensorial entre espacios vectoriales se puede extender a módulos sobre un anillo conmutativo k con unidad en forma totalemente análoga a la dada para espacios vectoriales.

Definición. *El álgebra tensorial $(T(V),\otimes)$ del k-espacio vectorial V es el álgebra asociativa generada por $T^0(V)=k$ y $T^1(V)=V$ con el producto tensorial. Es decir,*

$$T(V)=\bigoplus_{j=0}^{\infty}T^j(V)=k\ \oplus\ V\ \oplus\ V\otimes V\ \oplus\ V\otimes V\otimes V\ \oplus\dots$$

El álgebra tensorial $T(V)$ satisface la siguiente propiedad universal:

Propiedad Universal del Álgebra Tensorial. *Si A es una k-álgebra asociativa y $\psi:V\to A$ es un morfismo de k-espacios vectoriales existe un único morfismo de álgebras asociativas $\Psi:T(V)\to A$ tal que $\psi=\Psi\circ\iota$ donde $\iota:V\to T(V)$ es la inclusión natural dada por $\iota(V)=T^1(V)$.*

Ejercicio A.1. Dado V un k-espacio vectorial, probar que $T^n(V^*)$ es isomorfo como álgebra al espacio de funciones $f:\oplus_{i=1}^n V\to k$ multilineales con el producto de funciones.

Análogamente podemos definir el álgebra tensorial de un k-módulo con las estructuras respectivas.

Veamos que el álgebra tensorial $T(V)$ es en particular un álgebra graduada. Para ello recordemos que una *filtración* (creciente) en un álgebra A es una sucesión $(A_n)_{n\geq 0}$ de subespacios vectoriales (k-submódulos) de A tales que
(i) $A_n\subset A_{n+1}$, y
(ii) $A_nA_m\subset A_{n+m}$.
La filtración se dice *exaustiva* si $A=\cup_{n\geq 0}A_n$.

Una *graduación* en una k-álgebra B es una sucesión $(B^n)n\geq 0$ de k-subespacios de B tales que:
(i) $B^nB^m\subset B^{n+m}$, y
(ii) $B=\cup_{n\geq 0}B^n$.

A partir de una graduación de B se puede construir la filtración (creciente) y exaustiva $B_n=\oplus_{j=0}^n B^n$. Y viceversa, a partir de una filtración creciente y exaustiva $(A_n)_{n\geq 0}$ se puede definir la graduación

$$gr_nA=A_n/A_{n-1}$$

donde convenimos que $A_{-1}=0$.

Si denotamos $grA=\oplus_{n\geq 0}\ gr_nA$, tenemos que es una k-álgebra graduada donde la multiplicación viene dada por la extensión por linealidad de las aplicaciones bilineales

$$gr_nA\times gr_mA\to gr_{n+m}A$$

inducidas por la multiplicación de A.

En particular, $B=T(V)$ es graduada donde $B^n=T^n(V)$. A través de esta graduación podemos definir una filtración como aclaramos más arriba.

Dada un álgebra tensorial $(T(V),\otimes)$ se pueden definir álgebras cocientes a partir de relaciones de la siguiente manera. Sea R el ideal generado por un conjunto de relaciones, consideremos el cociente

$$T(V)/R=\{w+R:w\in T(V)\}$$

Dicho conjunto es un espacio vectorial por ser R un ideal. Por la misma razón el siguiente producto está bien definido

$$\begin{aligned} \otimes^R : T(V)/R \times T(V)/R &\to T(V)/R \\ (w_1 + R, w_2 + R) &\to (w_1 + R) \otimes^R (w_2 + R) = w_1 \otimes w_2 + R \end{aligned}$$

Ejemplos clásicos de cocientes de álgebras tensoriales.

1. *Álgebra simétrica:* Es el álgebra cociente $S(V) = T(V)/R$ bajo las relaciones

$$v \otimes u - u \otimes v = 0 \qquad \forall u, v \in V$$

Ejercicio A.2:. a) Probar que el producto resultante $\otimes^R$ es un producto simétrico.

b) Probar que $(S(k^m), \otimes^R)$ es un álgebra graduada isomorfa al álgebra de polinomios en m variables con coeficientes en k, donde $S^n(k^m)$ es isomorfo al espacio vectorial de polinomios de grado n.

2. *Álgebra exterior:* Es el álgebra cociente $\bigwedge V = T(V)/R$ bajo las relaciones

$$v \otimes u + u \otimes v = 0 \qquad \forall u, v \in V$$

Ejercicio A.3:. a) Probar que el producto resultante $\wedge = \otimes^R$ es un producto antisimétrico.

b) Probar que $(\bigwedge V, \wedge)$ es un álgebra graduada donde cada espacio de graducación $\bigwedge^n V$ es isomorfo al espacio vectorial de funciones multilineales $f : \oplus_{i=1}^n (V^*) \to k$ antisimétricas, es decir que $f(\dots, v, w, \dots) = -f(\dots, w, v, \dots)$ para cualquier $v, w \in V^*$ y para cualquier par de lugares consecutivos.

Referencias

[A] N. Andruskiewischt, *álgebras de Lie semisimples y representaciones de dimensión finita*, Trabajos de Matemática Serie B, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, 1994.

[BA] N. Bourbaki, *Algebra*, Hermann.

[BG] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Hermann, 1972.

[G] Esther Galina, *I Encuentro Nacional de Álgebra: Notas de cursos*, Trabajos de Matemática Serie B, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, 2004.

[H] J. Humpheys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer-Verlag, 1987.

[K] A. Knapp, *Lie groups byond an introduction*, Birkhäuser, 1996.

[S] J. P. Serre, *Lie algebras and Lie groups (Lectures Notes 1500)*, Springer-Verlag, 1992.