Medida, geometría y el proceso de medir

Esther Galina

Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba

LVIII Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina
XXXI Reunión de Educación Matemática
XX Encuentro Nacional de Estudiantes de Matemática
Mendoza, 22 y 23 de Septiembre 2008

Capítulo 1

Introducción

Estas son las notas del Curso para Profesores *Medida, geometría y el proceso de medir* dictado en la XXXI Reunión de Educación Matemática y de la LVIII Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina, que tuvo lugar en la Universidad Nacional de Cuyo en la semana del 22 al 27 de septiembre de 2008.

Quiero agradecer a los organizadores de la misma por haberme invitado a dictar este curso y también a quienes lo tomaron por haber contribuído en la discusión de los problemas tratados y haberse involucrado en la resolución y el análisis de cada uno de los problemas presentados.

Una de las preocupaciones actuales en la enseñanza de la matemática es achicar la brecha que hay entre las construcciones matemáticas escolares de los alumnos y las construcciones matemáticas que utilizan para resolver los problemas que les brinda la realidad.

En el intento de aportar en este sentido, analizaremos en qué puede contribuir el proceso de medir desde lo concreto de hacer una medición directa hasta las elaboraciones geométricas abstractas que se pueden producir. En el tratamiento de esta temática abordaremos conceptos matemáticos básicos de medida y de geometría, el aporte fundamental de la geometría de caracterizar objetos a través de las relaciones entre sus partes y cómo el hecho de medir, en forma directa o indirecta, permite ponerlos en juego y exponer a los alumnos a tener experiencias de resolver interrogantes similares a los provenientes de situaciones extraescolares, haciendo uso de los conocimientos más profundos aprendidos en el colegio.

En este sentido podemos plantear los siguientes objetivos generales vinculados a la problemática social del uso de la matemática y específicos de este curso.

Objetivos generales:

1. Romper la división entre las construcciones matemáticas escolares de los

estudiantes y las construcciones matemáticas que utilizan en la resolución de problemas no escolares de la vida cotidiana.

2. Incrementar el nivel de la matemática que utilizan las personas escolarizadas en problemas de la vida cotidiana.

Objetivos específicos del curso:

1. Reflexionar sobre el proceso de medir.

2. Visualizar el papel de la geometría en este contexto.

3. Analizar el tipo de contribución que produce el exponer a los alumnos a situaciones de medir.

Los contenidos del curso están distribuídos de la siguiente manera. En la primer parte se abordaran algunos aspectos generales sobre los conceptos de medida y medición. También se incluye el resultado de una actividad donde los docentes elaboraron, de acuerdo a su propia experiencia y conocimiento, una justificación sobre la incorporación de Medida dentro de los contenidos de Matemática y el planteo de las dificultades más frecuentes que tienen cuando abordan en clase este tema.

En una segunda parte se analizan los aspectos que involucra el proceso de medir. A través de ejemplos se discute la importancia de cada uno de ellos y la vinculación que tienen con la matemática.

Luego se describen algunos elementos importantes de la geometría que pueden contribuir en el armado de estrategias para resolver problemas y se analizan los ditintos aspectos que se ponen en juego en el proceso de medir en diferentes ejemplos. Como cierre, se discutirán algunas conclusiones sobre el tema.

Capítulo 2

Medir, medida y medición

2.1. ¿Cuál es la necesidad de medir?

Desde sus orígenes el hombre necesitó comparar objetos o eventos (cantidad de animales para comerciar, las estaciones del año, la temperatura, etc.). Su primer resultado fue la creación del concepto de **número** en el cual no me voy a detener porque ya habrán escuchado muchas veces hablar de ello.

Como instancia posterior a esa conceptualización, en el acto de la comparación, el hombre pudo distinguir diferencias entre las propiedades de los objetos en cuestión. Por ejemplo: si lo que se quiere comparar es la longitud de dos hilos, se puede decir "este es **más** largo o **menos** largo que este otro". Pero estas expresiones no permiten precisar demasiado. Una expresión más precisa es "el primero corresponde a dos veces el segundo". Eso también tiene una dificultad, si queremos compararlo con un hilo que no tenemos en ese momento, no lo podemos hacer.

2.2. ¿Por qué se necesita una unidad de medida para medir?

Un acto importante en la historia fue cuando el hombre se dio cuenta que para comparar dos objetos podía hacerlo indirectamente a través de un tercer objeto usado una medida estandar o **unidad de medida**. Esto solucionaría el hecho de poder comparar cosas que no se encuentran en el mismo lugar, por ejemplo, siempre que podamos llevar la unidad de medida con uno. Como sabemos, al hablar de longitud, las primeras unidades de medida fueron el pie, el pulgar, el brazo, etc., de las cuales todavía consevamos la denominación en el sistema de medida inglés. Estas unidades de medida se denominan antropométricas. No resultaban lo suficientemente precisas porque dependían de quien las tomara. Por otro lado, la fijación de las unidades de medida pasó a ser una herramienta de poder. Durante el feudalismo, sobre los mismos objetos (tierras, casas, personas, producción) el municipio poseía ciertos derechos, otros el señor feudal, otros la iglesia, y otros el rey. Cada uno de ellos establecía las propias unidades y a veces agrandaban los patrones para obtener mayores tributos de sus vasallos. El Sistema Métrico Decimal surge en Francia con la Revolución Francesa como producto de un reclamo popular de una unidad *justa*, común a todos los habitantes. Así se le encargó a la Academia de Ciencias en 1790, y en ese mismo año la Academia comunicó que se había elegido la escala decimal para pesos, longitudes y monedas. La determinación del metro patrón demoró casi diez años más.

Este hecho permitió que se introdujera la **objetividad** en el acto de comparar. Su significado literal es “acuerdo interpersonal". Si las observaciones se pueden cuantificar de alguna manera, expresarlas en términos de valores, es posible que la comunicación evite interferencias de la particularidad de cada individuo. De esta manera, tanto en la vida cotidiana como en cualquier trabajo que requiera objetividad y precisión, se plantea de qué manera se puede cuantificar o dar valores numéricos a lo que se está observando, es decir **cómo medir** lo que se está observando. Ya teniendo las mediciones se pueden comparar los valores resultantes y obtener conclusiones.

Definición 2.1. Una *unidad de medida* es una cantidad preestablecida, convencional o no, de una determinada propiedad o magnitud de objetos o eventos. Una unidad de medida convencional toma su valor a partir de un *patrón* inmodificable bajo ciertas condiciones o surgido como una composición de otras unidades definidas previamente.

Cada propiedad o magnitud tiene sus unidades de medida específicas.

Si medimos longitud, por ejemplo, sabemos que las unidades de medida convencionales son muchas dependiendo del orden de longitud que querramos medir, para caminos usamos km, para el ancho de una casa usamos metros, para el largo del lápiz usamos cm, para distancia entre microbios usamos ....

2.3. ¿Qué es una medición?

Las mediciones permiten que las descripciones puedan ser comunicadas a otros de manera concreta y objetiva.

Una definición de medición es la siguiente:

Definición 2.2. *Medición* es una asignación de números a objetos o eventos de acuerdo a reglas establecidas.

Esta es una definición muy general, ya volveremos a analizar mejor todas los aspectos que hay que tener en cuenta para realizar una medición.

En primer lugar, como hemos esbozado, se analiza una propiedad o atributo de objetos o eventos que llamamos *magnitud*. El concepto de magnitud involucra:

1. una *propiedad compartida* por muchos objetos;

2. un sentido de *conservación*, por lo menos bajo ciertos parámetros, en cada objeto que la posea;

3. que pueda *ordenarse*;

4. que pueda *cuantificarse*.

El hecho que la magnitud pueda cuantificarse, permite definir una *función* a valores en $\mathbb{R}$, el conjunto de números reales, no necesariamente suryectiva y muy posiblemente no inyectiva,

$$M : \left\{ \begin{array}{c} \text{objetos o eventos con cierta} \\ \text{propiedad o atributo} \end{array} \right\} \to \mathbb{R}$$

Observemos que esta función es compatible con el orden propio de la magnitud, es decir, podemos afirmar que la función es creciente. En efecto, dados dos objetos x e y tales que la magnitud en x es menor que la magnitud en y, la asignación dada por la función M debe safisfacer $M(x) < M(Y)$ para que tenga sentido haber hecho esta asignación. Más aún, la unidad de medida tiene como imagen el número real 1, y puede no ser única.

La posibilidad de medir permitió a otras ciencias o aplicaciones tecnológicas a utilizar la matemática como lenguaje universal. Este lenguaje brinda precisión, sistematización, objetividad y una manera de comunicación de los resultados obtenidos en forma concreta para ser analizados.

Transcribo a continuación la frase con la cual comienza el libro Psychometric Methods del Profesor en Psicología de la Universidad de Southern California, J. P. Guilford [Gui].

El progreso y la maduración de una ciencia es juzgada a menudo por la amplitud en la cual ha tenido éxito en el uso de la matemática.

2.4. ¿Por qué medida está dentro de los contenidos de Matemática?

Ahora es momento de refleccionar y para ello contestaremos algunas preguntas en grupos sobre las que luego volveremos.

1. ¿Por qué medida está dentro de los contenidos de matemática?
2. ¿Qué actividades concretas de medir les dan a sus alumnos?
3. ¿Cuáles son las dificultades más comunes se les plantean cuando abordan el tema medida?

Del Proyecto Edumat-Maestros *Didáctica de las matemáticas para maestros* que dirige Juan D. Godino [Go], extraje la siguiente fundamentación.

El estudio de las magnitudes y su medida es importante en el currículo de matemáticas desde los niveles de educación infantil hasta secundaria debido a su aplicabilidad y uso extendido en una gran cantidad de actividades de la vida diaria. El estudio de la medición también ofrece oportunidad de aprender y aplicar otros contenidos matemáticos, como operaciones aritméticas, ideas geométricas, conceptos estadísticos y la noción de función. Permite establecer conexiones entre diversas partes de las matemáticas y entre las matemáticas y otras áreas diferentes, como el área de sociedad, ciencias, arte y educación física.

La puesta en común de las respuestas brindadas por los participantes del curso, sin haberlas ordenado, son las siguientes:

Pregunta 1: Porque puede brindar los siguientes aportes a los estudiantes:

- Sentido material al cálculo analítico.
- Noción de orden de magnitud.
- Dependencia de la unidad de medida.
- Contacto con lo cotidiano.
- Comunicación en el medio no escolar.
- Permite iniciar otros conceptos de mayor nivel de abstracción.
- Desarrollo de competencias como lo es concretamente la comparación para tomar decisiones.

- Vínculo bidireccional entre objetos reales y la matemática.
- Permite poner al alumno como protagonista activo.
- Vinculación con otras ciencias y entre distintas áreas de la matemática, puede ser un eje transversal.

Si observamos estas respuestas podemos deducir que prácticamente todas abordan algún aspecto entre la vinculación de la matemática con el mundo real. Más aún, todas encierran una contribución en la formación del joven para desembolverse en la sociedad (fuera del colegio) con más habilidades y competencias.

Pregunta 2: La mayoría de las respuestas consistió en experiencias de medición directa usando unidades no convencionales. Hubo sólo dos, desarrolladas en clase de física o en el contexto de una feria de ciencias por parte del profesor de física, donde la medición fue indirecta e involucró otros conceptos matemáticos e incluso construcción de un aparato de medición. Todas las experiencias planteaban en la consigna la estrategia a usar para medir, incluso especificando la unidad de medida a utilizar.

Pregunta 3: Las dificultades encontradas son:

- Confusión entre la relación entre dos magnitudes distintas (si dos objetos tienen una de ellas igual, la otra no necesariamente es igual).
- No acompañan al número con la unidad de medida.
- Equivalencias entre distintas unidades de medida de la misma magnitud.
- Problemas con el uso de las herramientas de medición.
- Confusión entre unidad de medida y la magnitud misma.
- Desprecio a la exactitud.
- Concepto de aproximación con determinada precisión.
- Desinterés.

Posiblemente, trabajar más el tema en relación a situaciones insertas en un contexto familiar para los alumnos que destaquen que el mal uso de esos conceptos puede producir consecuencias importantes, pueda ayudar a enfrentar este tipo de dificultades.

Capítulo 3

El proceso de medir

3.1. Aspectos del proceso de medir

Una pregunta que surge es ¿cómo podemos medir cosas cuyos atributos medibles no son claros, que no traen explícitamente un número para asociarle? ¿cómo podemos asignar números a objetos o eventos? La naturaleza, como la conocemos, tiene propiedades que pueden ser representadas por estructuras lógicas de ciertos sistemas de la matemática.

Incluso cuando es claro el atributo a medir, cada individuo que pretenda medir la magnitud de un objeto o evento deberá estar atento a qué estrategia utilizar en cada situación particular.

De acuerdo a lo que hemos dicho el proceso de medición involucra (ver [MG]):

1. *Abstracción* que capte la esencia de la propiedad o atributo a medir permitiendo asignar un valor numérico a cada objeto o evento que posea esa propiedad.
2. *Estrategia* para poder obtener esos números efectivamente.
3. *Unidad de medida* para expresar el resultado en forma objetiva y comparable.
4. *Aparato necesario para realizar la medición* adecuado a la precisión deseada a obtener.

Evidentemente la matemática aparece en el primer punto. ¿Por qué? Pues antes de poder medir hay que poder asignar, en forma teórica, a cada objeto el número que refleje el atributo específico de ese objeto. Es decir, la manera en que se podrá obtener una función a valores numéricos, que cuantifique ese atributo.

Esa función es, en principio, teórica.

Ejemplo 3.1. La función "medida de la altura de las personas de esta sala". No quiere decir que hayamos medido efectivamente a cada persona, pero sabemos qué número asignar que refleje esa propiedad en cada persona de esta sala. Por ejemplo el número que se obtenga al determinar la longitud del segmento perpendicular al piso que une el piso con el punto más alto de la cabeza de la persona.

En ese proceso hemos dado sentido en abstracto a la altura como la longitud de un segmento específico.

El segundo punto, la estrategia para obtenerlo en concreto, también involucra el ingenio y la matemática. Para medir lo mismo podemos plantear distintas estrategias. Piensen en dos diferentes.

Ejemplo 3.2. ¿cómo harían ustedes para medir el mástil de la escuela que está en el patio disponiendo sólo de un metro?

En este caso, ya sabemos qué significa el número que representa la altura, pero no es sencillo obtenerlo directamente porque no nos podemos subir al mástil para tirar desde la punta de arriba el metro, incluso es posible que este no nos alcance. ¡¡¡Aquí también tendremos que hacer uso de la matemática!!!

¿Qué **estrategia** se les ocurre?

Plantiémos una de las formas de resolver el problema. Consideremos el triángulo rectángulo cuyos vértices son la punta y la base del mástil y la punta de la sombra del mástil. Ese triángulo es semejante al triángulo formado por el punto más alto de la cabeza de uno de nosotros, el punto del piso justo debajo del anterior y la punta de la sombra. Como la relación entre los catetos de triángulos rectángulos semejantes son iguales, si denotamos con h el cateto horizontal y v el cateto vertical del triángulo dado por nosotros, esa relación es $\frac{v}{h}$. Por otro lado, si H es el cateto horizontal y V el cateto vertical del triángulo dado por el mástil, tenemos que esa relación también es $\frac{V}{H}$. Es decir, $\frac{V}{H} = \frac{v}{h}$, entonces $V = \frac{vH}{h}$. Como V es exactamente la altura del mástil, midiendo H, h y v tenemos el resultado esperado.

Ejemplo 3.3. Una vez una persona que colaboraba en un comedor de niños marginados me plateó el siguiente problema. Las mujeres que preparaban la comida recibían bolsas de harina y de arroz, ellas las utilizaban hasta que se les acababa y no hacían ninguna previsión respecto a saber hasta cuándo les durarían. Cuando se quedaban sin arroz no tenían qué hacer de comer hasta que les llegaran más bolsas.

Si uno de nuestros chicos quisiera ayudar en el comedor, con la formación del colegio tendrían que ser capaces de hacer esa previsión. ¿Cómo hacer para saber hasta cuando dura el arroz?

Necesitan saber cuanto arroz se usa por comida y cuanto arroz tienen y comparar esas cantidades. Para ello hay que averiguar algunos **datos**:

1. la cantidad de raciones se hacen por comida: 150,
2. cantidad de arroz que se usa por ración: 1/2 taza,
3. cantidad de bolsas de arroz que hay: 8,
4. cantidad de arroz por bolsa: 50 kg.

Luego hay que dar alguna **estrategia** para medir la cantidad de arroz usada por comida y la cantidad de arroz que hay en la misma unidad de medida.

Ejemplo 3.4. Este lo leí del libro *Matemática ¿estás ahí?* de Adrián Paenza, gran divuldador de la matemática y de las ciencias en general. El problema consiste en medir la cantidad de peces que hay en un lago. Como va a ser imposible dar un valor que refleje la realidad con exactitud, sólo se pretende dar un valor aproximado como respuesta.

¿Cómo podemos hacerlo? La dificultad está en elegir la estrategia a usar que nos lleve a alguna respuesta con sentido. Una estrategia es la siguiente, podría haber otras. En una lancha y con una red de pescadores sacamos una cantidad de peces, digamos 1000, cuidando que no se mueran. De alguna manera los marcamos y los devolvemos al agua. Dejamos un tiempo razonable para que esos peces se mezclen con el resto de los peces del lago y volvemos a sacar la misma cantidad de peces. Contamos los que están marcados, supongamos 10 de los 1000, un 1 %.

Si la probabilidad de encontrar un pez marcado en la red (cantidad de marcados sobre total de peces) es 10/1000, esto nos dice que la cantidad de peces que marcamos (1000) es un 1 % del total de los peces del lago, suponiendo que se mezclaron en forma homogénea.

Conclusión: una estimación del total de peces del lago es 100000!!!

Podríamos hacer lo mismo con porotos dentro de un barril, pero tal vez en ese caso los chicos encuentren otras estrategias.

3.2. Algunos conceptos matemáticos surgidos por medir

En este intento de reflexionar sobre el proceso de medir hay que destacar que muchos conceptos matemáticos surgieron en el intento de medir alguna propiedad específica.

Por ejemplo, los griegos en el intento de medir la longitud de una circunsferencia, definieron el número π como la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro que resulta un valor constante independientemente de la circunferencia de que se trate. En función de dar un valor explícito a π, la estrategia utilizada produjo el concepto de límite de sucesiones y de aproximación, pues pudieron expresar a π, $c_n < \pi < d_n$, como límite de una sucesión c_n monótona creciente y otra d_n monótona decreciente.

Otro ejemplo que modificó la matemática del siglo XVII fue el concepto de *derivada*. A pesar que no siempre se dice claramente, la derivada surgió en el intento de Newton de medir el movimiento. En realidad, la derivada de una función en un punto no es más que la medida del crecimiento de esa función en ese punto. Un ejemplo gráfico de ello es ver la velocidad de un auto en un instante dado (el número que aparece en el velocímetro del auto) como la medida del crecimiento o variación de la función posición en ese instante dado, es decir la derivada de esa función en ese instante.

La *integral* también surge como la medida del área encerrada por una curva.

La *probabilidad* es otro ejemplo sorprendente que aparece para poder medir algo que en principio parecería imposible de asignarle un número y que es, por ejemplo, la posibilidad de ganar un juego de azar. Observemos que no siempre es tangible el objeto mismo que se quiere medir, el caso de la probabilidad refleja claramente que se asigna un número a un atributo no tangible.

En este sentido, podría dar muchísimos ejemplos más de conceptos matemáticos surgidos en el intento de medir algún atributo de un objeto o evento. Incluso de la matemática del siglo XX y XXI.

Más adelante, volveremos a los ejemplos dados para seguir reflexionando sobre el proceso de medir y el poder de la matemática.

Capítulo 4

Contribuciones de la geometría y del proceso de medir

4.1. ¿Cuáles son las características importantes de la geometría y su vinculación con el proceso de medir?

Según Santaló (cita del prólogo de [MS]):

Los griegos, que crearon la Geometría, dibujaban las figuras en la arena, que tenía la ventaja de poder borrar, pero faltaba precisión. Por esto se dijo que la Geometría era el arte de sacar consecuencias de figuras mal hechas.

Realmente, si bien no es una definición de la geometría, nos da una idea muy clara de su esencia y su poder. La geometría da muestras explícitas de cómo la matemática, entre otras cosas:

1. *abstrae* aspectos de la realidad (por ejemplo la forma de un objeto, olvidándose del objeto mismo),
2. *describe* sus partes (lados, ángulos, vértices, caras, etc.),
3. los *relaciona* (si los lados son paralelos; si son iguales; si los ángulos son iguales; si son complementarios, etc.),
4. *clasifica* tipos de objetos a través de las relaciones de sus partes (clasificación de los cuadriláteros y propiedades que caracterizan a cada uno de ellos),
5. *deduce* consecuencias haciendo sólo uso de las propiedades de los objetos (demostración geométrica del Teorema de Pitágoras).

Un problema frecuente es que los chicos no entienden la geometría que se ofrece en el colegio. Termina siendo un conjunto de planteos abstractos y relaciones sin producir un significado claro para ellos. No falta la oportunidad en que escuchemos: ¿y para qué aprendemos todas estas relaciones entre los lados o entre los ángulos de un triángulo o un cuadrilátero? Como docentes tenemos que brindarles oportunidades a los alumnos para que puedan darle ese significado.

Como hemos visto en los distintos ejemplos del capítulo anterior, tanto la geometría como otras áreas de la matemática intervienen como herramientas en el proceso de medir. La intervención de la geometría no sólo se debe a que la mayoría de magnitudes que se estudian en el colegio (longitud, área, volúmen) están vinculadas a objetos geométricos. Hay más poder en la geometría a ser usado.

Volvamos a los ejemplos. En el de medir el mástil de la escuela usamos una propiedad geométrica de triángulos semejantes que sin ella no podríamos haber resuelto el problema. En el problema de la huerta usamos los conceptos de perímetro y de superficie de un rectángulo y su fórmula en término del valor de sus lados.

Este tipo de contribuciones de la geometría generalmente aparecerá en las estrategias para obtener medidas en forma indirecta porque justamente, como caracterizó Santaló, la geometría obtiene muchas consecuencias a partir figuras mal hechas o de relaciones entre sus partes.

Daremos otro ejemplo del uso de la geometría vinculado con medidas pero donde el problema no consiste exactamente en tener que dar una medida, sino decidir cual es la más conveniente.

Ejemplo 4.1. Han donado a una escuela rural 100m de alambre tejido para rodear la huerta rectangular que se había planificado hacer. Hay que marcar el terreno para poner los postes que sostendrán el alambre. ¿Por dónde marcamos el terreno?

4.2. ¿Qué podemos rescatar del proceso de medir?

Quiero destacar que no soy especialista en Educación Matemática, sólo soy una matemática que se interesa en la Educación y sólo puedo hablar desde mi experiencia de dictar cursos para docentes, de trabajar en talleres con chicos, de analizar propuestas de cursos para docentes.

Coincidiendo con Paenza, creo que es una obligación, de los que sabemos un poco más de matemática, mostrarles a los jóvenes y a la población en general que *la matemática está ahí* .

¿ Qué queremos que les quede a los chicos cuando les enseñamos matemática?

Además de todos los conceptos que sabemos que es necesario que sepan, queremos:

- que puedan **reconocer un problema matemático** en un entorno real extraescolar,
- que adquieran **más habilidades** para resolverlos,
- que valoren **justificar** sus decisiones y sus respuestas,
- **que disfruten** de resolver un problema.

¡Todo eso se aprende!

Una vez, dando un curso para docentes de matemática, le pedí a los profesores que me cuenten ejemplos de la realidad que hayan trabajado con los alumnos desde un punto de vista matemático, es decir que me cuenten un problema no áulico de la realidad que lo hayan analizado con los chicos con los lentes de la matemática.

Todas se trabaron para responder, pero finalmente tuve una respuesta que fue la siguiente:

"Cuando ibamos de viaje en el ómnibus a Puerto Madryn con todo el curso, como los chicos estaban aburridos y *como también les doy física*, empezamos a medir la velocidad media del ómnibus viendo los mojones en el camino. ¡Estaban contentísimos al ver que podían hacerlo!".

Las otras agregaron: "Ah! ese tipo de cosas las hacemos en clase de física, no en clase de matemática".

¿Son los profes de física los responsables de mostrar la matemática que hay en la realidad y de desarrollar el pensamiento matemático en los chicos? Bienvenidos si ellos lo hacen, pero... si nosotros no lo hacemos ¿no les damos una idea errada a los chicos de lo que es la matemática? Como dice Paenza: *¡a la matemática le faltan defensores!*

Los profesores de matemática de nivel medio y los maestros tienen una gran función en la sociedad:

- son los **responsables** de alfabetizar matemáticamente a la sociedad ¡Qué tarea!
- son los **referentes** de la matemática en el colegio y de la comunidad vinculada a él,

- son los que **tienen la mirada desde la matemática** de las cosas cotidianas,
- son los **encargados de mostrarles** a los jóvenes que la matemática está ahí.

¡La sociedad no ha tomado conciencia de la importancia de su función!

Volvamos al **ejemplo de medir el mástil de la escuela**. Este ejemplo tiene varios aspectos interesantes a ser analizados como ejemplo de problema que se les puede formular a los estudiantes.

1. Es un problema planteado en un *lenguaje no escolar* que podría estar presente en cualquier otro contexto. Es una manera de exponer a los chicos a situaciones similares a las de la realidad ya que muchos de los problemas no escolares tienen como desafío dar la medida de alguna cosa.
2. La *magnitud a medir es clara*, sin embargo *no es claro que los alumnos se sientan capaces de resolverlo* con los conocimientos que tienen.
3. El enunciado no asocia el problema a un mecanismo de cálculo ni sugiere cómo resolverlo.
4. No hay forma de realizar una medición directa. Hay que plantear una *estrategia* para resolver el problema en forma *indirecta*.
5. La estrategia tiene que involucrar un *uso creativo de los conceptos matemáticos*.
6. La *base* de la estrategia dada es una propiedad geométrica de triángulos semejantes o de proporciones. Sin ese *conocimiento escolar* no podría haberse planteado esta estrategia.
7. El planteo del problema *no tiene datos específicos*. Es parte de la resolución del problema saber qué datos necesitan y conseguirlos.
8. La obtención de los datos los hará salir del aula y los expondrá a otro tipo de desafíos y problemáticas concretas de *medición directa* como por ejemplo el uso de instrumentos de medición.
9. Todo el *proceso* favorecerá el intercambio de ideas entre ellos, tanto de ideas matemáticas como de emprender en grupo la resolución de un problema.
10. Puede motivar a los alumnos por salir de lo rutinario.

Analicemos ahora el **ejemplo del comedor de niños**.

1. Es un problema planteado en un *lenguaje no escolar*.

2. El problema se reduce a estimar la cantidad de tazas de arroz que se pueden llenar con 50 kg de arroz. Se mide un mismo objeto respecto de *dos magnitudes diferentes*.

3. El problema se puede resolver en forma *directa o indirecta*. Una *estrategia óptima* es necesariamente indirecta.

4. La *base* de la estrategia indirecta es una propiedad de proporciones directas. Sin ese sencillo *conocimiento escolar* no podría haberse planteado esta estrategia.

5. El planteo del problema *tiene datos específicos no suficientes*. Es parte de la resolución del problema saber qué datos más hay que obtener.

6. La obtención de los datos los hará salir del aula y los expondrá a otro tipo de desafíos y problemáticas concretas de *medición directa*, como así también de *incorporar órdenes de magnitudes*.

7. La *respuesta que se obtenga es importante*, pues de ello depende dejar algunos días a los niños sin comer.

8. La elección de la estrategia tiene que tener en cuenta la *optimización* y la *factibilidad* de obtener una respuesta.

9. Todo el *proceso* favorecerá el intercambio de ideas entre ellos, tanto de ideas matemáticas como de emprender en grupo la resolución de un problema.

Analicemos el **problema de la estimación de la cantidad de peces de un lago**.

1. Es un problema planteado en un *lenguaje no escolar*.

2. La *magnitud a medir es clara*, sin embargo *no es claro que los alumnos se sientan capaces de resolverlo* con los conocimientos que tienen.

3. No hay forma de realizar una medición directa. Hay que plantear una *estrategia* para resolver el problema en forma *indirecta*.

4. La estrategia tiene que involucrar un *uso creativo de los conceptos matemáticos*.

5. La *base* de la estrategia es usar el concepto de probabilidad. Sin ese *conocimiento escolar* no podría haberse planteado esta estrategia.

6. El planteo del problema *no tiene datos específicos*. Es parte de la resolución del problema saber qué datos necesitan.

7. La estrategia es teórica, *no es factible* llevarla a cabo. El mismo problema sería factible si cambiamos el lago por un gran barril lleno de porotos donde problema consiste en estimar la cantidad de porotos que hay en el frasco.

8. Es muy probable que la estrategia sugerida por Paenza no se les ocurra a los chicos, pero las estrategias también pueden imitar y adaptar otras conocidas. También es posible que surjan otras nuevas.

9. Todo el *proceso* favorecerá el intercambio de ideas entre ellos, tanto de ideas matemáticas como de emprender en grupo la resolución de un problema.

Por último, analicemos el **problema de la huerta**.

1. Es un problema planteado en un *lenguaje no escolar*.

2. El problema pide indirectamente dar las dimensiones del terreno rectángular, por tener *distintas respuestas* permite discutir si hay una *óptima* en algún sentido.

3. Está vinculada a una *toma de decisión* y favorece el planteo de una *justificación* de la misma.

4. Puede incentivar el análisis sobre la *relación entre perímetro y superficie*.

5. El problema se reduce a *obtener el valor máximo de la superficie* de un terreno de perímetro fijo.

6. La *base* de la estrategia es obtener el punto donde una función cuadrática del tipo $ax^2 + bx$ con $a < 0$ alcanza su mayor valor. Sin los *conocimientos escolares* sobre perímetro, superficie y funciones cuadráticas no podría haberse planteado esta estrategia.

7. La respuesta *relaciona órdenes de distintas magnitudes*.

8. Todo el *proceso* favorecerá el intercambio de ideas entre ellos, tanto de ideas matemáticas como de emprender en grupo la resolución de un problema.

4.3. Conclusiones

¿Qué aspectos serán necesarios a abordar en la clase de matemática para favorecer que nuestros alumnos puedan enfrentar problemas no escolares? Se me ocurren las siguientes:

- Brindar problemas no plateados como prototipos de problemas escolares, en "lenguaje no escolar", sin incluir todos los datos necesarios para la resolución, sin sugerir métodos explícitos de resolución. Esto no planteado en perjuicio de ofrecer una diversa práctica de problemas típicos de cada tema.
- Desarrollar confianza en los alumnos de abordar problemas variados.
- Elaborar y aceptar distintos tipos de estrategias apropiadas a cada problemática planteada. Incluso aprovecharlas para discutir sobre la conveniencia de una u otra.
- Resaltar las estrategias para resolver un problema que involucren el uso creativo de conocimientos matemáticos ya estudiados. Valorar su uso por posibilitar la resolución, en caso que no haya otra forma de hacerlo, o por optimizarla, cuando las demás estrategias no resultan convenientes.
- Darles a los chicos la posibilidad de obtener una solución completa del problema, incluso si tienen que conseguir los datos que necesitan fuera del aula.
- Presentarles situaciones donde la respuesta es importante y donde la resolución podría depender de ellos.
- Favorecer la vinculación de distintos temas ya estudiados.

El hecho de que muchos problemas que se plantean en la vida cotidiana encierran finalmente alguna medición, *el proceso de medir y la geometría* pueden favorecer en muchos aspectos el acercamiento entre la matemática escolar y la no escolar.

Para enfatizar esto, hay que reconocer el hecho que, en la vida, todo el tiempo tenemos que tomar decisiones y optar por la opción más conveniente, es decir que tenemos que comparar las distintas opciones que se tienen. Hemos dicho que la medición surge de ese hecho. Si se puede cuantizar la conveniencia, es decir si podemos medirla de alguna manera, es fácil decir cual es la mejor. Esto dice que en la vida estamos expuestos permanentemente a problemas de medida.

En tal sentido, y de acuerdo a las respuestas de las preguntas de la última sección del Capítulo 2, ¿qué aspectos serán necesarios a abordar en la clase de matemática vinculados a la medida y al proceso de medir? Por lo menos podemos nombrar estos:

- Trabajar el concepto de cada magnitud con sus propias dificultades. Comprender la diferencia entre diversas magnitudes.
- Favorecer la creación de diversos tipos de estrategias de medición que pongan en juego distintos conceptos, propiedades y resultados matemáticos de distintos niveles de dificultad, en particular vinculados a la geometría.
- Analizar la elección de la estrategia en función de:
  - *Factibilidad de la medición:* Que efectivamente se pueda obtener un resultado.
  - *Presición adecuada:* Obtener datos lo suficientemente precisos para que la respuesta sea adecuada al problema a resolver.
  - *Optimización del proceso:* Obtener el resultado en el menor tiempo y con el menor esfuerzo posible.
- Experimentar la obtención de los datos necesarios de acuerdo a la estrategia de resolución planteada.
- Experimentar la medición directa y el uso de las herramientas de medición.
- Trabajar la elección de la unidad de medida asociada a cada magnitud, convencional o no convencional, de orden adecuado en relación a lo que se quiere medir.
- Trabajar la estimación de medidas.

¿Involucrar a los chicos en procesos de medición ¿nos ayudará a mostrarles que podemos *descubrir* la matemática en todos lados?

¡ La respuesta la tienen ustedes!

Bibliografía

[Go] J. D. Godino, *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*, Proyecto Edumat-Maestros, http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/, 2004.

[Gui] J. P. Guilford, *Psychometric Methods*, Ed. McGraw-Hill Book Company Inc., 1954.

[MG] A. Maiztegui y R. Gleiser, *Introducción a las Mediciones de Laboratorio*, Ed. Kapeluz, 1980.

[MS] P. Marbach y L. Saidón, *Haciendo Geometría*, Centro Babbage, Buenos Aires, 2000.

[P] A. Paenza, *Matemática ¿estás ahí?*, http://www.dm.uba.ar.

[Pi] *A History of Pi*, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Pi_through_the_ages.html