Práctico 5

1. Sean $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \times [0,1]$, $B = (\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}) \times [0,1]$ y $C = B \cup \{(x,0) : 0 \leq x \leq 1\}$ con las topologías relativas de la usual de $\mathbb{R}^2$.
a) Dar las componentes conexas de A, B y C.
b) Determinar si A, B y C son localmente conexos o arco-conexos.
c) ¿Existe $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ continua tal que $f|_X = \mathrm{id}$, para $X = A, B$ o C?

2. Probar que si B es un subconjunto no vacío, abierto, cerrado y conexo de un espacio topológico X, entonces B es una componente conexa de X.

3. a) ¿Es $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ arco-conexo en $\mathbb{R}^2$?
b) Probar que $(\mathbb{R}\times\mathbb{Q})\cup\{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ es arco-conexo y no es localmente conexo.

4. Sean $X_1 = \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}$ y $X_2 = \{(x, \sin(1/x)) : x > 0\}$. Consideramos $X = X_1 \cup X_2$ con la topología relativa de $\mathbb{R}^2$. Demostrar que X es un espacio conexo que no es arco-conexo, y que X_1 y X_2 son las componentes arco-conexas de $X\cdot$

5. a) Probar que la unión finita de subconjuntos compactos de un espacio topológico, es compacta.
b) Dar varios ejemplos mostrando que la unión infinita de subconjuntos compactos, puede no ser compacta, en diferentes espacios topológicos.
c) ¿Los conjuntos $\mathbb{Q} \cap [2,3]$ y $\{(-1)^n/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ son compactos en $\mathbb{R}$?
d) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ que converge a x. Probar que $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto.

6. a) Todo subconjunto compacto y no vacío de $\mathbb{R}$ tiene máximo y mínimo.
b) Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y X es compacto, entonces f tiene máximo y mínimo en X.

7. Una función $f : (X,d) \to (X',d')$ entre espacios métricos se dice *uniformemente continua* si $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$. Probar que si X es compacto y f es continua, entonces f es uniformemente continua.

8. a) Sea (X,τ) un espacio topológico, compacto y T_2. Probar que no existe ninguna topología τ' menos fina que τ tal que (X,τ') sea T_2.
b) Sea (X,τ) un espacio topológico, compacto y T_2. Probar que no existe ninguna topología τ' más fina que τ tal que (X,τ') sea compacto.

9. Probar que la imagen de un espacio localmente compacto por una función continua y abierta es localmente compacta. Mostrar que esto deja de cumplirse si la función no es abierta.

10. Probar que las proyecciones de un espacio producto $\prod_{i\in I} X_i$ sobre cualquiera de sus espacios coordenados son funciones abiertas.

11. Sean $\{X_i\}_{i\in I}$ espacios topológicos, $A_i \subseteq X_i$ y $X = \prod_{i\in I} X_i$ con la topología producto.
a) Estudiar la relación entre $\prod_i A_i^\circ$ y $(\prod_i A_i)^\circ$.
b) Estudiar la relación entre $\prod_i \overline{A_i}$ y $\overline{\prod_i A_i}$.
c) Probar que si $X = X_1 \times X_2$ y $A_i \subseteq X_i$, entonces $\mathrm{Fr}(A_1 \times A_2) = (\mathrm{Fr}(A_1) \times \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \times \mathrm{Fr}(A_2))$.

12. Sea $I = I_1 \cup I_2$ con $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ y sean X_i, con $i \in I$, espacios topológicos. Probar que:
a) $\prod_{i\in I} X_i \simeq (\prod_{j\in I_1} X_j) \times (\prod_{j\in I_2} X_j)$.
b) Si $X_i \simeq Y_i$ para todo i, entonces $\prod_{i\in I} X_i \simeq \prod_{i\in I} Y_i$.

13. Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ continua. Probar que:

a) X es T_2 sii $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ es cerrado en $X \times X$.

b) Si Y es T_2, entonces $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$.

14. Sean $X = \mathbb{R}$ con la topología usual, $Y = \mathbb{R}$ con la topología discreta y $Z = \mathbb{R}$ con la topología generada por $\{[a, b) : a < b\}$.

a) Decidir si $X \times Y$ y $X \times Z$ son espacios T_2, N_1, N_2, separables, conexos, compactos.

b) Calcular $\bar{A}_j$, A_j° y $\mathrm{Fr}(A_j)$ en $X \times Y$ y $X \times Z$ para $j = 1, 2$, donde $A_1 = [0, 1] \times [0, 1]$ y $A_2 = (-1, 1) \times \mathbb{Q}$.

15. Sea $z \in \prod_{i \in I} X_i$ y $D = \left\{x \in \prod_{i \in I} X_i : \exists\ J \subset I \text{ finito y } x_i = z_i\ \forall\ i \notin J\right\}$. Probar que D es denso.