Práctico 6

1. Sean $X = [0,1] \cup [2,3]$ e $Y = [0,2]$ subespacios de $\mathbb{R}$. En X consideramos la relación de equivalencia "$\sim$" que identifica 1 con 2. Sea $f : X \to Y$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1], \\ x-1 & \text{si } x \in [2,3]. \end{cases}$$

a) Probar que f induce un homeomorfismo del cociente $X/_{\sim}$ en Y, y que f no es abierta.

b) Sea $A = [0,1) \cup [2,3]$ subespacio de X y sea $g = f|_A : A \to Y$. Probar que g es continua y suryectiva, pero que g no induce un homeomorfismo del cociente $X/_{\sim}$ en Y.

2. En $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definimos la relación de equivalencia $x \sim y$ si $\|x\| = \|y\|$.

a) Probar que la proyección canónica $\pi : X \to X/_{\sim}$ es abierta y cerrada.

b) Probar que $X/_{\sim} \simeq \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

3. Consideramos en $\mathbb{R}$ la relación de equivalencia $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$. Probar que la topología cociente de $\mathbb{R}/\sim$ es la indiscreta.

4. Sea X un espacio topológico T_2 y K un subconjunto compacto de X. Probar que X/K es T_2.

5. Sea $D^2 = \overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^2$. Probar que $D^2/S^1 \simeq S^2$.

6. Considerar $I = [0,1]$ y $D^{n+1} = \overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con las topologías relativas usuales. Mostrar que $S^n \times I/S^n \times \{0\}$ es homeomorfo D^{n+1}.

7. Sean $\prod_i X_i$ una familia de espacios topológicos y $\sim_i$ relaciones de equivalencia abiertas en X_i. Definimos en el espacio producto la relación de equivalencia $(x_i) \sim (y_i)$ si $x_i \sim_i y_i$. Probar que $\left(\prod_i X_i\right)/_{\sim}$ es homeomorfo a $\prod_i \left(X_i/_{\sim_i}\right)$.

8. Sean $I = [-1,1]$, $X = I/_{\sim_1}$, $Y = I/_{\sim_2}$ donde $\sim_1$ identifica $\frac{1}{2}$ con 1 y $\sim_2$ identifica $-\frac{1}{2}$ con -1 y $\frac{1}{2}$ con 1. Probar que X no es homeomorfo a Y.

9. Considerar el conjunto $\mathrm{SO}(n)$ de matrices $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$, ortogonales y con determinente igual a 1.

a) Mostrar que $\mathrm{SO}(n)$ es compacto.

b) Considerar $\mathrm{SO}(n-1) = \{A \in \mathrm{SO}(n) : Ae_1 = e_1\}$ y la relación de equivalencia $\sim$ en $\mathrm{SO}(n)$ definida por: $A \sim B$ si y sólo si $B^{-1}A \in \mathrm{SO}(n-1)$. Mostrar que $\big(\mathrm{SO}(n)/_{\sim}\big)$ es homeomorfo a S^{n-1}.

10. Sea $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos finitos. Encuentre los límites de las siguientes sucesiones: $a_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $x_n = 1$ si n impar, $x_n = n$ si n par.

11. Sea X un conjunto, $x_0 \in X$ y consideremos la topología $\tau_{x_0} = \{A \subseteq X : x_0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$. Describir las sucesiones convergentes en (X, τ_{x_0}). ¿Existen sucesiones que convergen a más de un punto?

12. Sea X un espacio métrico e $Y \subset X$ completo. Probar que Y es cerrado.

13. Sea X un espacio métrico tal que para algún $r > 0$, todas las bolas de radio r tienen clausura compacta. Probar que X es completo.

14. Subsucesiones vs subredes.

a) Probar que las subredes de sucesiones no son necesariamente subsucesiones.

b) Si $\{x_n\}$ es una sucesión de rango finito, entonces tiene una subsucesión constante.

c) Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio topológico N_1. Si $\{x_n\}$ tiene una subred convergente, entonces tiene una subsucesión convergente.

15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = \infty$. Probar que f es cerrada.

16. Sean X e Y espacios compactos y N_2. Usando sucesiones, probar que $X \times Y$ es compacto.

17. Sean X e Y espacios compactos y T_2 y $f : X \to Y$ tal que Gráfico(f) es cerrado en $X \times Y$. Probar que f es continua.

18. Sea X un espacio N_2. Si la proyección $p_2 : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es cerrada, probar que X es compacto.

19. Sea X un espacio métrico completo. Sea $f : X \to X$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x, y)$ para algún $0 < \alpha < 1$ y para todo $x, y \in X$. Demostrar que f tiene un único punto fijo.