# Práctico 0

**1.** Sean $A$, $B$, $C$ subconjuntos de un conjunto $X$. Demostrar las siguientes afirmaciones.

a) $A \subseteq B \iff A \cap B = A$.
b) $A \subseteq B \iff A \cup B = B$.
c) $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$.
d) $A \subseteq B \Longrightarrow B = A \cup (B \setminus A)$.
e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
g) $A \subseteq B \cap C \Longrightarrow A \subseteq B \wedge A \subseteq C$.
h) $A \cup B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq C$.
i) $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$.
j) $A \setminus B = A \cap B^c$.
k) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Leyes de De Morgan)

**2.** Sean $A$, $B \subseteq X$ y $C$, $D \subseteq Y$. Demostrar las siguientes afirmaciones.
a) $A \times C \subseteq B \times D \iff A \subseteq B \wedge C \subseteq D$.
b) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.
c) $(A \times C)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times C^c)$.

**3.** Sean $A_1, ..., A_n$ subconjuntos de un conjunto $X$.
a) Probar que $A_1 \cap (A_2 \cup \cdots \cup A_n) = (A_1 \cap A_2) \cup \cdots \cup (A_1 \cap A_n)$.
b) ¿Es cierto que $A_1 \cap \cdots \cap A_n \subset A_2 \cap A_{n-1}$?
c) ¿Es verdad que $A_1 \cup A_2 \subset (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \cup \cdots \cup A_n)$?

**4.** Sea $f : X \to Y$, $A$, $B \subseteq X$ y $C$, $D \subseteq Y$. Probar:
a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Además, $f$ inyectiva $\Longrightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
e) Si $A \subseteq B$ entonces $f(A) \subseteq f(B)$ y si $C \subseteq D$ entonces $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$.
Demostrar también:
f) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ (y se cumple la igualdad si $f$ es inyectiva).
g) $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$ (y se cumple la igualdad si $f$ es suryectiva).
h) $f^{-1}(C^c) = [f^{-1}(C)]^c$.
i) Si $f$ es inyectiva entonces $f(A^c) \subseteq [f(A)]^c$.
j) Si $f$ es suryectiva entonces $[f(A)]^c \subseteq f(A^c)$.
Además:
k) En todos los items donde probó alguna contención, busque ejemplos de funciones que muestren que a veces no se cumple la igualdad.
Finalmente:
l) $f$ es inyectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$. ($\mathrm{id}_X : X \to X$ es la función identidad de $X$, esto es, $\mathrm{id}_X(x) = x \ \forall x \in X$.)
m) $f$ es suryectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.
n) **Corolario:** $f$ es biyectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ y $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

**5.** a) Probar que si $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ y $x \notin \mathbb{N}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n-1 < x < n$.
b) Probar que si $x \in \mathbb{R}$ y $x > 0$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x$.
c) $A \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo si y sólo si $[x, y] \subseteq A$ para todo $x, y \in A$.

d) Probar que $x \in (0,1)$ si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$.

**6.** Dados los conjuntos $A$, $B$ y $C$, expresar cada uno de los siguientes conjuntos en términos de $A$, $B$ y $C$ usando uniones, intersecciones, etc.

a) $D = \{x : (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C\}$.

b) $E = \{x : x \in A \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C)\}$.

**7.** Verdadero o Falso. (Justificar)

a) $A \subset B$ o $A \subset C \iff A \subset (B \cap C)$.

b) $(A \setminus B) \times (C \setminus D) = ((A \times C) \setminus (B \times C)) \setminus (A \times D)$.

c) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.