Práctico 1

1. a) Sea X un conjunto, definimos

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Demostrar que (X, d) es un espacio métrico.

b) Sea A un conjunto y $B(A) = \{f : A \to \mathbb{R} : f \text{ es acotada}\}$, definimos $d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in A\}$. Demostrar que $(B(A), d)$ es un espacio métrico.

2. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sea $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$. Probar que

$$d(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$$

es una métrica en $C[a,b]$. Ver en un gráfico qué "mide" esta distancia.
¿Es cierta la afirmación si se reemplaza continuidad por integrabilidad en la definición de $C[a,b]$?

3. Sea V un espacio vectorial (real o complejo) con una norma $\|\cdot\|$. Probar que si se define $d : V \times V \to [0,\infty)$ por $d(x,y) = ||x - y||$, entonces (V, d) es un espacio métrico.

4. Sean E y F espacios métricos, y sea $f : E \to F$ continua $x \in E$. Probar:

a) Si $g : E \to F$ coincide con f en un abierto U tal que $x \in U$, entonces g es continua en x.

b) Si $x \in A \subset E$, entonces $f|_A$ es continua en x.

c) Si G es un espacio métrico y $g : F \to G$ es continua en $f(x)$, entonces $g \circ f$ es continua en x.

5. Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ son abiertos o cerrados con la métrica euclídea:

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : m < d((x,y),(0,0)) < n\}$ donde $0 \leq m < n$.

b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : m \leq d((x,y),(0,0)) < n\}$ donde $0 \leq m < n$.

c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z \in \mathbb{Z}\}^c$.

d) $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

e) $(S^2)^c$.

f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ x \neq 1/n \forall n \in \mathbb{N}\}$.

6. Sean (E,d) un espacio métrico, $A \subset E$ y $x \in E$. Se define la *distancia* de x a A por

$$\tilde{d}(x,A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}.$$

a) Demostrar que si definimos $\delta : E \to \mathbb{R}$ por $\delta(x) = \tilde{d}(x,A)$, entonces δ es continua.

b) Probar que si $r \geq 0$, el conjunto $\{x : \tilde{d}(x,A) \leq r\}$ es cerrado en E.

7. Sea $X = C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$, consideramos las siguientes métricas en X

$$d_1(f,g) = \max\{|f(t) - g(t)| : t \in [0,1]\},$$

$$d_2(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt.$$

a) Analizar la continuidad de $\mathrm{Id} : (X, d_1) \to (X, d_2)$ y de $\mathrm{Id} : (X, d_2) \to (X, d_1)$.

b) Analizar la continuidad de las funciones $f \longmapsto f(1)$ y $f \longmapsto \int_0^1 f(t)dt$ para ambas métricas en X.