Notas para la materia Análisis IV

Walter Lamberti
Fernando Levstein

1. Introducción: Modelos

Para resolver problemas reales, necesitamos antes que nada plantear el problema. Esto requiere frecuentemente, de un modelo físico que involucra conceptos tales como trayectoria, velocidad, fuerza, etc. Estos conceptos suelen estar relacionados por leyes físicas que rigen su comportamiento, como por ejemplo la Ley de Newton. Para poder trabajar con estos modelos eficientemente, una forma es escribirlos en lenguaje matemático. Así, las trayectorias pasan a ser funciones, las velocidades, derivadas, y las fuerzas, campos vectoriales. En este mismo sentido, muchas leyes físicas se convierten en **ecuaciones diferenciales**.

Ley de Newton$\leftrightsquigarrow F = m\ddot{x}(t)$

De esta forma, las ecuaciones diferenciales sirven para darnos un modelo matemático de un problema (físico, económico, biológico, etc).

En este curso se intentará por una parte, dar una idea del planteo del problema físico y su expresión como modelo matemático en términos de ecuaciones diferenciales. Por otro lado, se mostrarán algunas técnicas usadas en la resolución de dichas ecuaciones, como así también, resultados teóricos que nos permiten decidir sobre la existencia y unicidad de las soluciones.

2. Ecuaciones diferenciales

Comenzaremos por algunos ejemplos sencillos:

En primer año, ya se encontraron con alguna que otra ecuación diferencial y la resolvieron sin problemas usando integración:

Ejemplo 1. *La trayectoria $x(t)$ de un móvil sujeto a la ley de gravedad satisface la ecuación*

$$\ddot{x}(t) = -g$$

Integrando ambos miembros obtenemos

$$\int_{t_0}^{t} \ddot{x}(s)ds = \int_{t_0}^{t} -gds$$

y usando el TFC

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(t_0) = -g(t - t_0)$$

Si repetimos estos pasos una vez más obtenemos:

$$x(t) - x(t_0) - \dot{x}(t_0)(t - t_0) = -g\frac{(t - t_0)^2}{2}$$

que describe la trayectoria como función de t. Notamos que la solución depende de la posición y la velocidad en el momento inicial.

2.1. Campos direccionales

Dada una ecuación del tipo $\dot{x} = f(t, x)$ una herramienta que ayuda a tener idea del comportamiento de su solución es graficar el **campo de direcciones** correspondiente. Esto se hace dibujando pequeños segmentos de recta en el plano t, x en puntos de una grilla del plano de tal forma que en en el punto (t_j, x_j) el segmento dibujado tiene pendiente $f(t_j, x_j)$. Este conjunto tiene la propiedad que las soluciones del problema serán curvas cuyas tangentes en los puntos de la grilla contienen a los segmentos graficados.

Otra manera de graficar un campo de direcciones, más acorde al uso manual, es tomando distintos valores de c y graficando primero las curvas de nivel $f(x, y) = c$. Una curva de este tipo se lama isoclina, ya que en cada uno de sus puntos la pendiente de la recta tangente a la solución de la ecuación diferencial que pasa por dicho punto es la misma (igual a c). Por esta propiedad, una vez graficada la isoclina podemos cortarla con tantos segmentos paralelos como queramos. Realizando esto para varios valores de c, tendremos una buena idea del campo de direcciones.

2.2. Método de variables separables

Ejemplo 2. *La ecuación $\dot{x}(t) = ax(t)$ con un parámetro conveniente a describe el crecimiento de una población $x(t)$ de bacterias, con suficiente comida y espacio.*

En este caso ya no se puede usar el truco de integrar ambos miembros, pero podemos reducir al caso anterior si suponemos que la solución no se anula ($x(t) \neq 0 \, \forall t$). Para esto, dividimos ambos miembros por $x(t)$ y observamos que

$$\frac{d \log(x(t))}{dt} = \frac{\dot{x}}{x(t)} = a$$

Integrando entre t_0 y t ambos miembros y usando el TFC, tenemos:

$$\log x(t) - \log x(t_0) = a(t - t_0)$$

de donde resulta

$$\frac{x(t)}{x(t_0)} = e^{a(t-t_0)}$$

¿Qué hubiera pasado si la población era nula en el instante t_0?

En tal caso la derivada en ese instante sería también 0 y tendríamos que la función constante 0 es una solución. Notemos que las soluciones obtenidas antes no se anulan para ningún valor de t.

¿Tenemos suficientes soluciones? Es decir, dada la **condición inicial**: (t_0, x_0), tenemos una solución que cumpla que $x_0 = x(t_0)$?. En este caso la solución $x(t) = x_0 e^{(t-t_0)}$ cumple con dichas condiciones.

¿Habrá otras soluciones? La existencia de distintas soluciones para un mismo dato inicial $x(t_0) = x_0$ es un tema crucial ya que un modelo que las admita no nos permite distinguir cuales son las que resuelven nuestro problema real. Por esto es muy útil un teorema que nos garantice la unicidad de las soluciones en caso que las funciones que definen la ecuación cumplan ciertos requisitos. En este caso la población en todo momento queda determinada una vez que sabemos su valor en un tiempo t_0.

Ejemplo 3. *La ecuación $\dot{x} = x^{1/3}$ es satisfecha por*

$$y(t) = \begin{cases} (\frac{2}{3}t)^{3/2} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

y también por la función nula. Ambas se anulan en $t = 0$, por lo cual el problema no tiene solución única si la condición inicial es $x(0) = 0$.

La ecuación diferencial **ordinaria de primer orden** más general es de la forma:

$$G(t, x, \dot{x}) = 0$$

donde $G : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Consideraremos ahora el caso en que $\dot{x}$ puede despejarse en términos de t y x:

$$\dot{x}(t) = F(x(t), t)$$

En estos casos, podemos integrar ambos miembros entre t_0 y t y obtener una **ecuación integral** equivalente:

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} F(x(s), s) ds$$

Una diferencia es que la nueva ecuación permite despejar $x(t)$ como

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(x(s), s) ds$$

El miembro de la derecha no se puede calcular sin conocer $x(s)$, pero si en lugar de $x(s)$ usamos una aproximación, por ejemplo $x(s) = x_0$ obtenemos una nueva función y tiene sentido preguntarnos si es una mejor aproximación. Esto es, definimos una sucesión

$$x_n(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(x_{n-1}(s), s) ds$$

y nos pregntamos si convergerá a la solución.

Ejemplo 4. *$\dot{x} = ax$ con condición inicial $x(0) = 1$*

Aquí la ecuación integral es $x(t) = x(0) + \int_0^t ax(s)ds$ y la recurrencia resulta

$$x_n(t) = 1 + \int_0^t a x_{n-1}(s) ds$$

Si tomamos como primera aproximación $x_0(t) = x(0) = 1$, tenemos

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t a ds = 1 + at$$

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t a(1 + as) ds = 1 + at + \frac{(at)2}{2}$$

Usando inducción vemos que

$$x_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(at)^i}{n!}$$

Como se vio en Análisis II, $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = e^{at}$

2.3. Unicidad

Supongamos que en el ejemplo anterior hubiese otra solución $y(t)$ con $y(t_0) = x_0$, entonces esta satisfaría

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} ay(s)ds$$

Tendríamos entonces

$$|x(t) - y(t)| = |\int_{t_0}^{t} ax(s)ds - \int_{t_0}^{t} ay(s)ds| \leq \int_{t_0}^{t} |ax(s) - ay(s)|ds$$

y esto a su vez implica que

$$|x(t) - y(t)| \leq |t - t_0| \max_{s\in[t_0,t]} |ax(s) - ay(s)|$$

Entonces si tomamos h que cumpla $0 < h|a| < 1$ y llamamos $\alpha = h|a|$ llegamos al siguiente absurdo:

$$\max_{t\in[t_0-h,t_0+h]} |x(t) - y(t)| \leq \alpha \max_{s\in[t_0-h,t_0+h]} |x(s) - y(s)|$$

Esta idea puede usarse para tratar el caso general. Para eso usaremos la siguiente:

Definición 5. *Una función $f(x, y)$ definida en un dominio D satisface la condición de Lipschitz con respecto a la variable y para la constante L, si para cada x, y_1, y_2 tales que $(x, y_1), (x, y_2)$ están en D*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

El siguiente teorema será demostrado más adelante.

Teorema 6. *Sea $f(t, y)$ una función continua y Lipschitz con respecto a la variable y, en un rectángulo $a < t < b, c < y < d$ que contiene al punto (t_0, y_0). Entonces para algún $h > 0$ existe una función $y = \phi(t)$ definida en $I = (t_0 - h, t_0 + h) \subset (a, b)$ con $\phi(t) \in (c, d)\, \forall t \in I$ que es la única solución de*

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad t \in I$$

3. Factor Integrante

Consideremos ahora una ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Esta es el caso más general de una ecuación diferencial de primer orden **lineal**. Es lineal porque cada término es lineal en y o dy/dx. Si $q(x) = 0$ la ecuación es **homogénea**. Por ser lineal, la suma de soluciones del problema homogéneo es también una solución y cualquier solución del problema no homogéneo es suma de una solución particular más alguna solución del problema homogéneo.

Esta ecuación es muy importante para la física y puede resolverse de manera exacta. Para esto se busca el llamado **factor integrante** $\mu(x)$ tal que

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x) \tag{1}$$

pueda rescribirse en la forma

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)q(x) \tag{2}$$

que puede resolverse integrando y da

$$\mu(x)y = \mu(x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} \mu(s)q(s)ds \tag{3}$$

Volviendo a la ecuación (2) tenemos que debe cumplirse

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu}{dx}y = \mu(x)q(x)$$

y comparando con (1) se tiene que $\mu(x)$ debe satisfacer:

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)p(x)$$

Que ya sabemos resolver separando las variables μ y x:

$$\mu(x) = \mu(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \tag{4}$$

Reemplazando (4) en (3) y despejando y se obtiene:

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}(y_0 + \int_{x_0}^{x} (e^{\int_{x_0}^{s} p(t)dt})q(s)ds) \tag{5}$$

Vemos que en el caso homogéneo $q(x) = 0$ y (5) se reduce a

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \tag{6}$$

El truco del factor integrante permite resolver todas la ecuaciones lineales de primer orden. Esta técnica puede ser combinada con el cambio de variables para resolver muchas otras ecuaciones como por ejemplo la Ecuación de Bernouille:

$$\dot{y} = p(x)y + q(x)y^n$$

en el caso en que $n \neq 1$ Para resolverlo dividimos ambos miembros por y^n y llamamos $V = 1/y^{n-1}$ entonces tenemos que la ecuación se transforma en:

$$\frac{V'}{n-1} = p(x)V + q(x)$$

que podemos resolver por factor integrante.

El cambio de variables $z = y/t$ permite resolver las ecuaciones $\dot{y} = f(t, y)$ cuando f es homogénea, es decir , $f(t, y) = F(y/t)$ si $t \neq 0$. En este caso usando $y' = z't + z$, la ecuación se transforma en en

$$z' = \frac{1}{t}(F(z) - z)$$

que es del tipo de variables separables.

3.1. Ecuación diferencial exacta

La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y}{Q(x, y)} \tag{7}$$

se suele escribir de la siguiente forma:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Esta ecuación se dice exacta cuando el miembro de la izquierda es una diferencial exacta, esto es, existe una función $F(x,y)$ tal que

$$dF := \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

En tal caso, las curvas de nivel, $F(x,y) = c$ son soluciones de la ecuación.

Esto se ve usando el teorema de la función implícita que nos dice que si F es continuamente diferenciable y $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ entonces existe una función $y(x)$ definida en un entorno de x_0 tal que $F(x, y(x)) = F(x_0, y_0)$ y además

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Si P y Q son continuamente diferenciables, una condición necesaria para que la ecuación sea exacta es que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Si esta condición se cumple en un dominio simplemente conexo D entonces la ecuación es exacta en D.

Ejemplo 7. *La ecuación* $ydx + xdy = 0$ *es exacta pues* $P_y = 1 = Q_x$*, podemos resolverla tomando*

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int F_x dx + C(y) \\ &= yx + C(y) \end{aligned}$$

donde $C(y)$ *debe satisfacer* $C'(y) + x = F_y = x$*. Luego* $C(y) = c$ *es constante y las soluciones de la ecuación son las curvas integrales de* $xy = c$ *o sea hipérbolas.*

A veces la ecuación no es exacta pero multiplicando a P y Q por un factor conveniente $\mu(x,y)$ se vuelve exacta.

Por ejemplo

$$xydx + x^2dy = 0$$

no cumple $P_y = x \neq 2x = Q_x$ pero multiplicando por $1/x$ se transforma en la ecuación anterior.

4. La ecuación de segundo orden

Como mencionamos al principio, la ley de Newton en mecánica se traduce como

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t, x, \dot{x})$$

Consideremos el caso del oscilador armónico, en él la fuerza viene dada por un múltiplo del desplazamiento, o sea, $F = -kx$. Tenemos en este caso una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. Veremos varias formas de resolver estos problemas.

Una forma es observar que las funciones $\operatorname{sen}(\sqrt{k}t)$ y $\cos(\sqrt{k}t)$ satisfacen la ecuación, como así también todas sus combinaciones lineales. Esto último es consecuencia de que la ecuación es lineal y homogénea. Tenemos así muchas soluciones. ¿Quedan determinadas si establecemos que en $t = 0$ deben tomar un valor x_0? La respuesta es no, ya que por ejemplo $\operatorname{sen}(\sqrt{k}t)$ y $2\operatorname{sen}(\sqrt{k}t)$ toman el mismo valor en $t = 0$.

En el caso de la ecuación de segundo orden hacen falta dos datos para tener unicidad y así poder identificar la solución. Una forma es establecer el valor de la solución y el de su derivada en $t = t_0$. Esto se llama problema a valores iniciales. Otra es establecer los valores que debe tomar la solución en dos momentos distintos t_0 y t_1, que es un tipo de problema con **condiciones de contorno**.

Por ahora usaremos el siguiente teorema que probaremos más adelante:

Teorema 8. *Sea $F(t, y, \dot{y})$ una función continua con derivadas parciales respecto a las variables $y, \dot{y}$ continuas, en un rectángulo $a < t < b, c < y < d, e < \dot{y} < f$ que contiene al punto $(t_0, y_0, \dot{y}_0)$. Entonces para algún $h > 0$ existe una función $y = \phi(t)$ definida en $I = (t_0 - h, t_0 + h) \subset (a, b)$ con $\phi(t) \in (c, d), \dot{\phi}(t) \in (e, f)\, \forall t \in I$ que es la única solución de*

$$\ddot{y} = F(t, y, \dot{y}) \quad y(t_0) = y_0 \quad \dot{y}(t_0) = y_1 \quad t \in I$$

En nuestro caso $F(t, y, \dot{y}) = -ky$, satisface las condiciones y hay unicidad.

Aplicación a fórmulas trigonométricas:

La función $y(t) = \operatorname{sen}(t+t_0)$ satisface la ecuación $\ddot{y} = -y$ con condiciones $y(0) = \operatorname{sen}(t_0), \dot{y}(0) = \cos(t_0)$. Por otra parte la función $\cos(t_0)\operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}(t_0)\cos(t)$ también satisface la ecuación y cumple las mismas condiciones. Luego por la unicidad dada por el teorema deben coincidir en un entorno de $t = 0$.

Otra forma más general de resolver ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes es pasar a la ecuación característica del problema que consiste en reemplazar las derivadas enésimas por potencias enésimas. En este caso pasamos de $md^2x/dt^2 = -kx$ a la ecuación polinomial $mx^2 = -kx^0$, es decir, $mx^2 = -k$. Así obtenemos dos soluciones:

$$\lambda_1 = i\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \lambda_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Tenemos entonces que las funciones $e^{\lambda_j t}$, definidas por

$$e^{\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

también satisfacen la ecuación, al menos formalmente. Más adelante probaremos que la fórmula de la exponencial se extiende a los números complejos y permite definir una función infinitamente derivable (más aún *analítica*).

Observación: el método que acabamos de ver, se justifica pensando a las soluciones de una ecuación diferencial como el núcleo de un operador diferencial. En el caso de una ecuación diferencial a coeficientes constantes, el correspondiente operador es un polinomio en el operador $D = \frac{d}{dt}$ y además es una transformación lineal en el espacio de funciones infinitamente diferenciables. Por ejemplo, la ecuación $\ddot{x} - x = 0$, puede verse como $Lx = 0$ donde L es el operador diferencial de segundo orden:

$$L = D^2 - 1 = \frac{d^2}{dt^2} - 1$$

el cual puede descomponerse como producto de dos operadores diferenciales de primer orden:

$$L = L_1 L_2 = (D - 1)(D + 1)$$

El núcleo de L contiene al núcleo de L_1 y al de L_2, así resulta que e^t y e^{-t} son soluciones de $L_1 x = 0$ y $L_2 x = 0$ respectivamente y por lo tanto son soluciones de $Lx = 0$.

Más generalmente, si tenemos la ecuación $Lx = 0$ y $L = p(D)$ con p un polinomio de grado n tenemos :

Proposición 9.

$$p(D)e^{\alpha t} = p(\alpha)e^{\alpha t}$$

Demostración. $D^n e^{\alpha t} = D^{n-1} D e^{\alpha t} = D^{n-1} \alpha e^{\alpha t} = \alpha D^{n-1} e^{\alpha t}$. Luego se sigue por inducción que $D^n e^{\alpha t} = \alpha^{n-1} e^{\alpha t}$

Como $p(D)$ es combinación lineal de potencias de D y $p(\alpha)$ es la misma combinación lineal, pero de potencias de α. Se tiene la igualdad de la proposición. $\square$

Corolario 10. *Las exponenciales* $e^{\lambda t}$ *con* λ *raíz de* p *son soluciones del sistema homogéneo* $p(D)x = 0$

Aplicación: Podemos aplicar nuevamente la unicidad de la solución para ver que al ser e^{it} solución del problema $\ddot{y} = -y$ con condiciones iniciales $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = i$, que también es satisfecho por $y(t) = \cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)$ se tiene:

$$e^{it} = \cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)$$

De hecho, esto concuerda con el siguiente calculo usando que $i^2 = -1$ y que las series albsolutamente convergentes pueden ser sumadas de cualquier forma.

$$\begin{aligned} e^{it} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (i^2)^n \frac{t^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} i(i^2)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1!} \\ &= \cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t) \end{aligned}$$

4.1. Caso en que la ecuación característica tiene raíz doble

Analicemos el siguiente ejemplo que corresponde a un resorte con amortiguación:

$$\ddot{y} = 2\dot{y} - y.$$

En este caso la ecuación característica es $y^2 = 2y - 1$ que tiene una raíz doble $\lambda = 1$. Podemos verificar que al igual que antes e^t es una solución. Por otra parte $e^{\mu t}$ no es solución si $\mu \neq 1$ y una solución no alcanza para cubrir todas las condiciones iniciales posibles. En los casos en que hay una raíz doble λ de la ecuación característica se verifica fácilmente que $y = te^{\lambda t}$ es también una solución ya que:

$$\dot{y} = e^{\lambda t} + te^{\lambda t} \quad \ddot{y} = 2e^{\lambda t} + te^{\lambda t}$$

Para una ecuación de la forma $\ddot{y} - 2\alpha y + \alpha^2 = 0$, se tendra que $e^{\alpha t}$ y $te^{\alpha t}$ son soluciones. Estas soluciones son linealmente independientes, esto es, ninguna combinación lineal no trivial de ellas puede ser la función nula.

$$c_1 e^{\alpha t} + c_2 t e^{\alpha t} = 0 \;\forall t \implies c_1 = c_2 = 0$$

Basta valuar en $t = 0$ para ver que $c_1 = 0$ y derivando y valuando en $t = 0$ se tiene $c_2 = 0$.

Resumiendo, la ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes tiene soluciones:

- $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ si las raíces λ_i son distintas.
- $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t}$ si la raíz λ_1 es doble.

El hecho que no hay otras soluciones se prueba viendo que si $y(t)$ es otra solución podemos resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix}$$

y por unicidad se tendrá $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ en caso de tener dos raíces simples. En el caso de una raíz doble α, resolvemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix}$$

y por unicidad se tiene: $y(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{\alpha t}$.

El problema de orden n tiene una solución similar:

Teorema 11. *Toda solución de la ecuación diferencial lineal de orden n a coeficientes constantes*

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \frac{d^j y}{dt^j}$$

es combinación lineal de las soluciones $t^j e^{\lambda_l t}$ con $0 \leq j < k_l$, donde λ_l son las raíces distintas de la ecuación característica y k_l es su correspondiente multiplicidad.

Demostración. Primero verificaremos que $t^j e^{\lambda_l t}$ son soluciones para $0 \leq j < k_l$. Para esto usamos la siguiente relación:

Lema 12.

$$p(D) e^{\alpha t} u(t) = e^{\alpha t} p(D + \alpha) u(t)$$

Demostración. Usamos inducción, verificamos primero que vale para D:

$$De^{\alpha t}u(t) = \alpha e^{\alpha t}u(t) + e^{\alpha t}Du(t) = e^{\alpha t}(D+\alpha)u(t)$$

y luego que si vale para D^{n-1} vale para D^n ya que

$$\begin{aligned} D^n e^{\alpha t}u(t) &= DD^{n-1}e^{\alpha t}u(t) \\ &= De^{\alpha t}(D+\alpha)^{n-1}u(t) \quad \text{por hipotesis inductiva} \\ &= e^{\alpha t}(D+\alpha)(D+\alpha)^{n-1}u(t) \\ &= e^{\alpha t}(D+\alpha)^n u(t) \end{aligned}$$

Luego vale para cualquier polinomio $p(D)$ por ser combinación lineal de potencias de D. □

Corolario 13. *Si* $j <$ multiplicidad de λ *entonces* $p(D)t^j e^{\lambda t}$*=0.*

Demostración. Tomando $u(t) = t^j$ en el lema, vemos que si $p(D) = (D-\lambda)^n$, tenemos

$$p(D)e^{\lambda t}t^j = e^{\lambda t}(D+\lambda-\lambda)^n t^j = 0 \quad \text{si } j < n$$

□

Proposición 14. *Toda familia de funciones* $\{e^{\lambda_k t}t^j\}_{j.k}$ *es linealmente independiente.*

Demostración. Debemos ver que la única combinación lineal que da la función idénticamente nula es la trivial. Esto puede escribirse también como:

$$\sum_k e^{\lambda_k t}p_k(t) = 0 \implies p_k \equiv 0 \;\forall\, k$$

donde p_k son polinomios (combinaciones lineales de t^j). Para esto usaremos inducción en $N = \max_k \operatorname{gr} p_k$. Si $N = 0$ el resultado es cierto pues la matriz cuadrada $(e^{j\lambda_k})$ es de Vandermonde con $e^{\lambda_k} \neq e^{\lambda_l}$ si $k \neq l$.

Supongamos cierto para N y probemos para $N+1$. Supongamos primero que hay sólo un polinomio de grado $N+1$ digamos el p_m. En este caso aplicamos D y tenemos:

$$\sum_k e^{\lambda_k t}p_k(t) = 0\,\forall t \implies \sum_k e^{\lambda_k t}(D+\lambda_k)p_k(t) = 0\,\forall t$$

restando $\lambda_m \sum_k e^{\lambda_k t} p_k(t) = 0$ a ambos miembros de esta última igualdad se tiene $e^{\lambda_m t} D p_m(t) + \sum_{k \neq m} e^{\lambda_k t}(D + \lambda_k - \lambda_m) p_k(t) = 0$ pero

$$\max_{k \neq m} \operatorname{gr}(D + \lambda_k - \lambda_m) p_k \leq N \geq \operatorname{gr} D p_m$$

y por inducción debe ser $Dp_m = 0$, esto es, p_m es constante pero esto es absurdo ya que $\operatorname{gr} p_m = N + 1 > 0$. En caso de haber $k > 1$ polinomios de grado máximo se hace el mismo argumento y se reduce al caso con $k - 1$ polinomios de grado máximo. $\square$

Dada cualquier condición inicial $\frac{d^j y}{dt^j} = b_j,\ 0 \leq j < n$ podemos hallar coeficientes $c_{l,j}$ tales que $\sum_{l=0}^{m} \sum_{j=0}^{k_l - 1} c_{l,j} t^j e^{\lambda_l t}$ satisfacen las condiciones iniciales.

Luego debido a la unicidad, toda otra solución coincidirá con estas en su intervalo de definición. La existencia de los $c_{l,j}$ se debe a que queda planteado un sistema lineal de ecuaciones con determinante no nulo. $\square$

En nuestro ejemplo, queremos buscar una solución con $y(0) = b_0, \dot{y}(0) = b_1$. Por otra parte tenemos

$$b_0 = c_{0,0} e^t + c_{0,1} t e^t(0) = c_{0,0} \quad b_1 = c_{0,0} e^t + c_{0,1}(e^t + t e^t)(0) = c_{0,0} + c_{0,1}$$

De donde despejamos $c_{0,0} = b_0$ y $c_{0,1} = b_1 - b_0$. Esto quiere decir que

$$y(t) = b_0 e^t + (b_1 - b_0) t e^t$$

es la solución buscada.

4.2. El caso no homogéneo

Para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea puede usarse el método de variación de los parámetros. Este método consiste en tomar una familia de soluciones generales p.ej., $t^j e^{\lambda_l t}$ con $0 \leq j < k_l$ y en lugar de formar combinaciones lineales con coeficientes constantes $c_{l,j}$, considerar a estos como funciones de t. A la ecuación original se agregan ecuaciones que facilitan el cálculo y se obtiene un sistema de ecuaciones en las funciones $c_{l,j}(t)$ del tipo que ya sabemos resolver.

Ejemplo 15. *Consideremos la ecuación*

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = F(t) \tag{8}$$

Sabemos que las soluciones del problema homogéneo son combinaciones lineales de $\cos\omega t$ *y* $\operatorname{sen}\omega t$ *proponemos soluciones para el no homogéneo de la forma* $y(t) = a(t)\cos\omega t + b(t)\operatorname{sen}\omega t$*. Derivando una vez tenemos:*

$$\dot{y}(t) = -a(t)\omega\operatorname{sen}\omega t + b(t)\omega\cos\omega t) + \dot{a}(t)\cos\omega t + \dot{b}(t)\operatorname{sen}\omega t$$

Aquí hacemos $\dot{a}(t)\cos\omega t + \dot{b}(t)\operatorname{sen}\omega t = 0$ *y derivamos nuevamente usando esta condición*

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2(a(t)\cos\omega t + b(t)\operatorname{sen}\omega t) - \dot{a}(t)\omega\operatorname{sen}\omega t + \dot{b}(t)\omega\cos\omega t)$$

Usando ahora la ecuación original queda

$$\begin{aligned} \dot{a}(t)\omega\operatorname{sen}\omega t + \dot{b}(t)\omega\cos\omega t) &= f(t) \\ -\dot{a}(t)\cos\omega t + \dot{b}(t)\operatorname{sen}\omega t &= 0 \end{aligned}$$

Que una vez resuelto el sistema lineal queda

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= \omega^{-1}\operatorname{sen}\omega t f(t) \\ \dot{b}(t) &= \omega^{-1}\cos\omega t f(t) \end{aligned}$$

que se resuelve por integración.

Una familia muy importante de problemas del tipo anterior es cuando la función es de la forma $F(t) = e^{\alpha t}$ donde α puede ser un numero complejo. En tal caso podemos resolver la ecuación (8) de la siguiente forma:

Proposición 16. *Dada la ecuación* $p(D)x = e^{\alpha t}$*, si* α *no es una raíz del polinomio* p*, entonces* $\frac{e^{\alpha t}}{p(\alpha)}$ *es una solución particular del problema no homogéneo.*

Prueba: Notemos que $De^{\alpha t} = \alpha e^{\alpha t}$ y más generalmente se prueba fácilmente usando inducción que

$$p(D)e^{\alpha t} = p(\alpha)e^{\alpha t}$$

Entonces tenemos que

$$p(D)\frac{e^{\alpha t}}{p(\alpha)} = p(\alpha)\frac{e^{\alpha t}}{p(\alpha)} = e^{\alpha t}$$

y se satisface la ecuación.

Ejemplo 17. *Hallar las soluciones de la siguiente ecuación:*

$$\ddot{x} - \dot{x} - 2x = e^t \cos t$$

En este caso $p(D) = D^2 - D - 2 = (D-2)(D+1)$*, además podemos escribir* $e^t \cos t$ *como la parte real de* $e^{(1+i)t}$*, por lo cual* $\alpha = 1 + i$ *Entonces una solución particular será la parte real de* $\frac{e^{(1+i)t}}{p(1+i)} = \frac{e^{(1+i)t}}{(i-2)i}$*. Para encontrar la parte real, multiplicamos y dividimos por* $-1 + 2i$ *y tenemos*

$$\frac{(-1+2i)e^t(\cos t + i \operatorname{sen} t)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{(-1+2i)e^t(\cos t + i \operatorname{sen} t)}{5}$$

Por lo cual la parte real es:$-e^t(\cos t + 2 \operatorname{sen} t)/5$*. Verificar que es solución.*

En el ejemplo anterior usamos una técnica muy importante que es la *complexificación del problema*: dada la ecuación $\ddot{y} + A\dot{y} + By = e^{\alpha t}$, buscamos soluciones complejas de la misma: $y(t) = y_1(t) + iy_2(t)$ donde y_1, y_2 son funciones reales.

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \ddot{y}_1 + i\ddot{y}_2 \\ A\dot{y} &= A\dot{y}_1 + iA\dot{y}_2 \\ By &= By_1 + iBy_2 \\ \ddot{y} + A\dot{y} + By &= \ddot{y}_1 + A\dot{y}_1 + By_1 + i(\ddot{y}_2 + A\dot{y}_2 + By_2) \end{aligned}$$

En el caso en que A y B son reales se tiene que $y(t)$ es solución de

$$\ddot{y} + A\dot{y} + By = e^{\alpha t}$$

si y sólo si $y_1(t), y_2(t)$ son soluciones de

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + A\dot{y}_1 + By_1 &= \Re\mathrm{e}\{e^{\alpha t}\} \\ \ddot{y}_2 + A\dot{y}_2 + By_2 &= \Im\mathrm{m}\{e^{\alpha t}\} \end{aligned}$$

5. Sistema lineal de ecuaciones diferenciales

Dada una ecuación diferencial de orden n

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}n} + \cdots + a_k \frac{d^k y}{dt^k} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0$$

Podemos definir nuevas variables $y_0 = y, y_1 = \dot{y}, \ldots, y_{n-1} = y^{(n-1)}$ entonces estas variables satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\dot{y_0} &= y_1 \\
\dot{y_1} &= y_2 \\
&\vdots \\
\dot{y}_{n-1} &= \frac{d^n y}{dt^n} = -(a_{n-1}y_{n-1} + \cdots + a_k y_k + \cdots + a_1 y_1 + a_0 y_0)
\end{aligned}$$

Esto puede ponerse en términos matriciales como:

$$\dot{Y} = AY \quad Y = (y_0, y_1, \ldots . y_{n-1})^T$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Una forma de resolver este sistema es buscar soluciones de la forma $Y(t) = e^{-\alpha t} z$ donde z es un vector de $\mathbb{R}^n$. En tal caso tenemos

$$\dot{Y} = \alpha e^{\alpha t} z \quad \text{y} \quad AY = Ae^{\alpha t} z = e^{\alpha t} Az$$

dividiendo por $e^{\alpha t}$ tenemos $\alpha z = Az$. Esta ecuación se estudia en algebra lineal y se llama problema de autovectores y autovalores. Fijado α sólo hay que resolver un problema lineal. Sólo para un conjunto finito de posibles α existe una solución $z \neq 0$. Esto se debe a que en tal caso el núcleo de $A - \alpha I$ es no trivial y esto ocurre si y sólo si su determinante es 0. Como este determinante es un polinomio de grado n en α esto sólo puede ocurrir para a lo sumo n valores distintos de α. Aquí hemos usado que el sistema $Az = \alpha z$ es lo mismo que $Az = \alpha I z$ y podemos restar a ambos miembros $\alpha I z$ y sacar factor común z obteniendo $(A - \alpha I)z = 0$.

6. Comportamiento de las soluciones de un sistema lineal con coeficientes constantes

Ejemplo 18. *Veamos como se modela la evolución del presupuesto de defensa de dos naciones rivales. Podemos proponer un modelo de la forma:*

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$$

Según los valores de los parámetros a, b, c, d que se tomen, obtendremos distintos comportamientos. En realidad el comportamiento quedará determinado por los valores de $a + b$ y $ad - bc$, que son los coeficientes del polinomio característico correspondiente.

Ejemplo 19. *Caso $a = 1, b = 2, c = -1, d = 4$ en este caso el polinomio característico es $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ el cual tiene raíces 2 y 3. Buscamos los correspondientes autovectores v_2 y v_3 resolviendo*

$$\begin{aligned} 2x &= 1x + 2y \\ 2y &= -1x + 4y \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 3x &= 1x + 2y \\ 3y &= -1x + 4y \end{aligned}$$

De donde obtenemos $v_2 = (1, \frac{1}{2})^t$ y $v_3 = (1, 1)^t$ Las soluciones son de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Para graficar las soluciones conviene comenzar con los casos particulares $c_1 = 0, c_2 = \pm 1$ y $c_1 = \pm 1, c_2 = 0$ En estos casos las correspondientes trayectorias de las soluciones son las semirrectas $\{tv_2\}_{t>0}$, $\{tv_2\}_{t<0}$, $\{tv_3\}_{t>0}$ y $\{tv_3\}_{t<0}$. Para otros valores de c_1 y c_2 vemos que para valores de t grandes

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} = \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{3t} \sim c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

En este caso el equilibrio es un sumidero, toda solución cercana al origen evoluciona hacia el origen.

Ejemplo 20. *Caso $a = 1, b = 2, c = 4, d = 3$ en este caso el polinomio característico es $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ el cual tiene raíces 1 y -5. Buscamos los correspondientes autovectores v_1 y v_{-5} resolviendo*

$$\begin{aligned} x &= x + 2y \\ y &= 4x + 3y \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -5x &= x + 2y \\ -5y &= 4x + 3y \end{aligned}$$

De donde obtenemos $v_1 = (1, 0)^t$ y $v_{-5} = (1, -3)^t$ Las soluciones son de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-5t}$$

Para graficar las soluciones conviene comenzar con los casos particulares $c_1 = 0, c_2 = \pm 1$ y $c_1 = \pm 1, c_2 = 0$ En estos casos las correspondientes trayectorias de las soluciones son las semirrectas $\{tv_1\}_{t>0}$, $\{tv_1\}_{t<0}$, $\{tv_{-5}\}_{t>0}$ y $\{tv_{-5}\}_{t<0}$. Para otros valores de c_1 y c_2 vemos que para valores de t grandes

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-5t} \sim c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

En cambio para valores de t muy negativos tenemos

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-5t} \sim c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-5t}$$

En este caso el equilibrio es un punto de silla, toda solución cercana al origen puede evolucionar hacia el infinito o hacia el origen.

Si tomamos los ejemplos dados por las matrices opuestas a los considerados, obtendremos las mismas trayectorias pero recorridas en sentido inverso. En el primer caso tendremos un nodo fuente, ya que toda solución evolucionará hacia el infinito. En el segundo caso será un nodo silla. Un caso esencialmente distinto es el siguiente:

Ejemplo 21. *Caso* $a = -1/2, b = 1, c = -1, d = -1/2$ *en este caso el polinomio característico es* $\lambda^2 + 1\lambda + 5/4 = 0$ *el cual tiene raíces* $-1/2 \pm i$. *Buscamos los correspondientes autovectores* v_+ *y* v_- *resolviendo*

$$\begin{aligned} (-1/2+i)x &= -1/2x + y \\ (-1/2+i)y &= -x - 1/2y \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (-1/2-i)x &= -1/2x + y \\ (-1/2-i)y &= -x - 1/2y \end{aligned}$$

De donde obtenemos $v_+ = (1, i)^t$ *y* $v_- = (1, -i)^t$ *Las soluciones son de la forma*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-1/2+i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-1/2-i)t}$$

En este caso no hay trayectorias rectilíneas en el plano real. La parte real y la imaginaria de $v_+ e^{(-1/2+i)t}$ son soluciones que se pueden escribir como $e^{-1/2t}(\cos t, -\operatorname{sen} t)^T$ y $e^{-1/2t}(\operatorname{sen} t, \cos t)^T$. Estas son espirales, como así también cualquiera de sus combinaciones lineales.

6.1. Caso de autovalores repetidos

Cómo hallar dos soluciones independientes cuando tenemos una raíz doble del polinomio característico sin un par de autovectores independientes.

Si el autovalor es 0, sea v un autovector y u tal que $Au = v$ entonces $x = u + tv$ es solución ya que $x' = v$ y $A(u + tv) = Au = v$. Si el autovalor es λ con autoector v consideramos la matriz $B = A - \lambda I$que tiene autovalor cero con autovector v por lo visto $y = u + tv$ resuelve el problema $y' = By$ luego $x = e^{\lambda t} y$ cumple $x' = \lambda x + e^{\lambda t} v$ y $Ax = e^{\lambda t}(v + \lambda y)$ que son iguales!

Ejemplo 22. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *tiene autovalor 2 con autovector* $(1, 0)^T$, *consideramos* $B = A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *y resolvemos* $Bu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Así obtenemos* $u = (0, 1)^T$ *y tomamos*

$$x(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos verificar que x es solución del sistema:

$$x' = 2e^{2t}(t,1)^T + e^{2t}(1,0)^T = e^{2t}(2t+1{,}2)^T = Ax.$$

Notemos que podríamos haber tomado como solución del sistema $u + av$ para cualquier a ya que v esta en el núcleo de B pero esto solo hubiera agregado a la solución obtenida un múltiplo de la solución $\mathrm{e}^{2t}v$ que ya teníamos.

6.2. La fórmula exponencial de la solución general

Consideremos el sistema $X' = AX$ con A una matriz constante $n \times n$ y X una matriz $n \times n$ cuyos coeficientes son funciones de t. Para matrices vale la regla de Leibniz para derivar el producto:

$$(AX)' = A'X + AX' = AX'$$

En la segunda igualdad usamos que la derivada de una matriz constante es 0. Si añadimos la condición inicial $X(0) = I$, donde l es la matriz identidad, podemos intentar resolver el caso general por aproximaciones sucesivas, de la misma forma que para $n = 1$.

Transformamos la ecuación $X' = AX$ en la ecuación integral

$$X(t) = X(0) + \int_0^t AX(s)ds$$

y definimos la recurrencia

$$X_n(t) = I + \int_0^t AX_{n-1}(s)ds$$

Si tomamos como primera aproximación $X_0(t) = X(0) = I$, tenemos

$$X_1(t) = I + \int_0^t Ads = I + At$$

$$A_2(t) = I + \int_0^t A(I + As)ds = I + At + \frac{(At)2}{2}$$

Usando inducción vemos que

$$X_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(At)^i}{n!}$$

Esta es una sucesión de sumas de matrices y para ver su convergencia, usaremos la norma de matrices que corresponde a pensarlas como vectores de $\mathbb{R}^{n^2}$, esto es: $||(x_{ij})||^2 = \sum_{i,j} |x_{ij}|^2$.

Recordemos dos propiedades muy importantes de esta norma

Lema 23. *Si X, Y son dos matrices $n \times n$*

$$\begin{aligned} ||X+Y|| &\leq ||X|| + ||Y||. & (9) \\ ||XY|| &\leq ||X||||Y||. & (10) \end{aligned}$$

Demostración. La primera inecuación es la desigualdad triangular en $\mathbb{R}^{n^2}$. Para la segunda definamos $f_i^X =$ la i-ésima fila de X y c_j^Y la j-ésima columna de Y. Entonces por la desigualdad de Schwartz en $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |< f_i^X, c_j^Y >| &\leq ||f_i^X||||c_j^Y|| \\ \sum_{1\leq i.j\leq n} |< f_i^X, c_j^Y >|^2 &\leq \sum_{1\leq i.j\leq n} ||f_i^X||^2||c_j^Y||^2 \\ \sum_{1\leq i.j\leq n} |< f_i^X, c_j^Y >|^2 &\leq \sum_{1\leq i\leq n} ||f_i^X||^2 \sum_{1\leq i\leq n} ||c_j^Y||^2 \\ ||XY||^2 &\leq ||X||^2||Y||^2. \end{aligned}$$

□

Ahora bien, como la serie $e^{||At||} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{||At||^k}{k!}$ converge, para todo $\epsilon > 0$ se puede encontrar un N tal que

$$||\sum_{k=m}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}|| \leq \sum_{k=m}^{\infty} ||\frac{(At)^k}{k!}|| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{||At||^k}{k!} < \epsilon \quad \forall m > N$$

En conclusión $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$ define una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^{n^2}$ que satisface la ecuación diferencial $X' = AX$, con condición inicial $X = I$.

Una vez probada la unicidad de las soluciones para sistemas lineales, podemos probar la siguiente

Proposición 24. *Dadas dos matrices $n\times n$, A y B que satisfacen $AB = BA$*

$$e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Demostración: Veamos que ambas son soluciones del sistema $\dot{Y} = (A + B)Y$ con condición inicial $Y(0) = I$. derivando el miembro de la izquierda tenemos $\dot{Y} = (A + B)e^{(A+B)t}$ mientras que el de la derecha nos da $\dot{Y} = Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt}$ usando la conmutatividad de A y B se tiene

$$Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt} = Ae^{At}e^{Bt} + Be^{At}e^{Bt} = (A + B)e^{At}e^{Bt}$$

como ambas satisfacen la misma ecuación diferencial y el valor en $t = 0$ es el mismo ($= I$), se tiene la igualdad para todo tiempo t.

Corolario 25. *Para toda matriz $n \times n$, A, se tiene que e^A es inversible y*

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}$$

Demostración. Notar que A conmuta con $-A$ y entonces

$$I = e^0 = e^{A-A} = e^A e^{-A}$$

□

Corolario 26. *Para toda matriz $n \times n$, A, se tiene que* $\det e^{At} > 0\ \forall\, t$.

Demostración. La función $\det e^{At}$ no se anula nunca por el corolario anterior y es continua ya que det es una función polinomial y e^At es derivable. Como para $t = 0$ vale 1 debe ser positiva para todo t. □

Definición 27. *La matriz fundamental del sistema $Y' = AY$ con condiciones iniciales en t_0 es una matriz cuyas columnas son soluciones de la ecuación y en $t = t_0$ es igual a la identidad.*

Corolario 28. *La matriz $e^{A(t-t_0)}$ es la matriz fundamental del sistema.*

Teniendo la matriz fundamental es muy sencillo resolver el problema $y' = Ay$ con condiciones iniciales $y(0) = y_0$. La solución debe ser una combinación lineal de las columnas de e^{At}. Es decir que puede escribirse como $y = e^{At}c$ donde c es el vector de coordenadas c_j. Para averiguar cuál es el c que se necesita, valuamos en $t = 0$ y obtenemos $y(0) = e^{A,0}c = Ic = c$. Es decir que debemos tomar la combinación lineal que viene dada por las coordenadas de la condición inicial y_0.

Corolario 29. *La solución del problema $y' = Ay$ con condiciones iniciales $y(t_0) = y_0$ viene dada por*

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}y_0.$$

6.3. Cálculo de e^{At}

Un caso en que es sencillo calcular e^{At} es cuando A es diagonal . En este caso todas las potencias son diagonales y la serie es una matriz diagonal donde los elementos de la diagonal vienen dados por $e^{a_{ii}t}$.

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{a_{11}t} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & e^{a_{nn}t} \end{pmatrix}$$

Si la matriz A fuese diagonalizable, es decir que existe una matriz inversible P (de cambio de base) tal que $D = P^{-1}AP$ es diagonal podemos usar que

$$e^{At} = e^{PDP^{-1}t} = Pe^{Dt}P^{-1}$$

para calcular la exponencial de A. Otro caso en que puede calcularse fácilmente es cuando la matriz A cumple $A^j = 0$ con j pequeño, ya que en tal caso sólo contribuyen a la serie los primeros j términos y las coordenadas de e^{At} resultan polinomios.

Un teorema muy famoso del álgebra lineal atribuido a Jordan dice que toda matriz $n \times n$ A se puede descomponer como suma de una matriz diagonalizable S y una matriz nilpotente N ($N^n = 0$) que conmutan entre si.

$$A = S + N \quad SN = NS.$$

Así tendríamos una forma de calcular la exponencial, pero encontrar la descomposición de A implica resolver el problema de autovectores y autovalores de A. En el caso de matrices 2×2 es posible calcularla usando la fórmula

$$A^2 = A\mathrm{tr}A - I\det A$$

Si consideramos el caso en que $\mathrm{tr}A = 0$ y $\det A \neq 0$, podemos escribir

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^{2k}}{2k!} + A\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k}t^{2k+1}}{2k+1!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\det A)^k t^{2k}}{2k!} I + A\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\det A)^k t^{2k+1}}{2k+1!} \\ &= (\cosh\sqrt{-\det A}\,t)I + \frac{\operatorname{senh}\sqrt{-\det A}\,t}{\sqrt{-\det A}}A \end{aligned}$$

En caso que $\det A = 0 = \mathrm{tr} A$ se tiene $e^{At} = I + tA$.

Si $\mathrm{tr} A \neq 0$ tomamos $B = A - \frac{\mathrm{tr} A}{2} I$ que tiene traza nula y podemos calcular entonces e^{Bt} por la fórmula y luego

$$e^{At} = e^{Bt + \frac{\mathrm{tr} A}{2} I} = e^{Bt} e^{\frac{\mathrm{tr} A}{2} I} = e^{Bt} e^{\frac{\mathrm{tr} A}{2}}$$

6.4. Variación de los parámetros

Para resolver $x' = Ax + r(t)$ con condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ proponemos $x = e^{A(t-t_0)}c(t)$ entonces $x' = Ae^{A(t-t_0)}c + e^{A(t-t_0)}c'$tenemos que resolver $r(t) = e^{A(t-t_0)}c'$ con condiciones iniciales $c(t_0) = x_0$ de donde $c' = e^{-A(t-t_0)}r(t)$ o bien $c = x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s-t_0)}r(s)ds$ Luego una solución particular del problema es :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-As}r(s)ds$$

7. Transformada de Laplace

Veremos ahora un método para resolver el problema no-homogéneo de una ED lineal con coeficientes constantes con condiciones iniciales.

$$p(D)y = f(t) \quad y^{(k)}(0) = y_k \quad 0 \leq k < \operatorname{gr} p$$

Para este método necesitamos la noción de transformada. A diferencia de un operador que manda funciones en funciones de la misma variable, una transformada manda funciones en funciones de otra variable.

Ejemplo 30. *Las sucesiones* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *pueden pensarse como funciones* $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ *y a cada una de ellas podemos asociarle una función* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Por ejemplo, si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la sucesión constante 1 tenemos

$$a_n = 1 \forall n \rightsquigarrow A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad 0 \leq x < 1$$

La transformada de Laplace viene a ser un análogo continuo de esto. Para ello debemos reemplazar $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ por una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y la suma por una integral entonces tendremos:

$$f(t) \rightsquigarrow F(x) = \int_{n=0}^{\infty} f(t)x^t dt$$

en realidad para entender mejor la fórmula conviene escribir a x^t como $e^{(\ln x)t}$ y tomar $0 < x \leq 1$ para que tenga sentido integrar. Si llamamos $s = -\ln x,\ 0 \leq s < \infty$ y tenemos la Transformada de Laplace:

$$f(t) \rightsquigarrow F(s) = \int_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

También la denotaremos por $\mathcal{L}(f(t)) = \int_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 31. *Si* $f(t) \equiv 1 \quad \mathcal{L}(f(t)) = \int_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty} \frac{-e^{-sT}}{s}\Big|_{t=0}^{t=T} = \lim_{T\to\infty} \frac{-e^{-sT}+1}{s} = \frac{1}{s}$

Ejemplo 32. *Si* $f(t) = e^{at}h(t) \quad \mathcal{L}(f(t)) = \int_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{at}h(t)e^{-st}dt = \int_{t=0}^{\infty} h(t)e^{-(s-a)t}dt = H(s-a)$

Así por ejemplo la transformada de e^{at} *es* $\mathcal{L}(e^{at}1)(s) = \mathcal{L}(1)(s-a) = \frac{1}{s-a}$.

¿Para qué funciones está definida la transformada de Laplace? Las siguientes condiciones garantizan que $\mathcal{L}(f(t))$ está definida para $s > a$:

Proposición 33. *Si* f *satisface:*

1. f *es continua a trozos.*
2. *Existen constantes* a, K *y* M *tales que*

$$|f(t)| \leq Ke^{at} \quad \forall\, t > M$$

Entonces $\mathcal{L}(f(t))$ *está definida para* $s > a$.

Para resolver un problema del tipo $y'' + ay' + by = f(t)$ la idea es aplicarle la transformada a ambos miembros. Para ello necesitamos saber como es la transformada de $y^{(k)}$ en términos de la transformada de y.

Proposición 34.

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)$$

Demostración. Integrando por partes se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f'(t))(s) &= \int_{t=0}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt \\
&= f(t)e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=\infty} - \int_{t=0}^{\infty} f(t)(-s)e^{-st}dt \\
&= -f(0) + s\int_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\
&= s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)
\end{aligned}$$

$\square$

Aplicando dos veces la regla se tiene:

Corolario 35.

$$\mathcal{L}(f''(t))(s) = s\mathcal{L}(f'(t)) - f'(0) = s^2\mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0)$$

Ejemplo 36. *Si* $f(t) = t \quad s\mathcal{L}(f) - f(0) = \mathcal{L}(f') = \mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$. *Luego*

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$$

Ahora podemos ver en que se transforma el problema $y'' + ay' + by = f(t) \quad y(0) = y_0 \quad y'(0) = y_1$. Transformando tenemos

$$s^2Y(s) - sy_0 - y_1 - a(sY(s) - y_0) + bY(s) = F(s)$$

Esta es una ecuación algebraica en Y !!, Observemos también la necesidad de incluir las condiciones iniciales. Una vez despejado Y debemos saber como invertir la transformada, esto es dada $F(s)$ encontrar $f(t)$.

Ejemplo 37. *Resolver*

$$y'' - 2y' + y = e^{-t} \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

Primero transformamos en

$$s^2Y(s) - sy_0 - y_1 - 2(sY(s) - y_0) + Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

Despejamos $Y(s)$*:*

$$Y(s) = \frac{1 + \frac{1}{s+1}}{s^2 - 2s + 1}$$

La solución será una $y(t)$ *tal que su transformada sea* $\frac{s+2}{(s-1)^2(s+1)}$.

Para resolver los problemas deberemos saber como invertir la transformada, esto es dada $Y(s)$ encontrar $f(t)$ tal que $\mathcal{L}(y(t))(s) = Y(s)$. Para esto es muy útil la descomposición en fracciones simples. En nuestro caso debemos encontrar constantes A, B y C tales que:

$$\frac{s+2}{(s+1)(s-1)^2} = \frac{A}{(s-1)^2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1}$$

Así la solución buscada será

$$Ae^t t + Be^t + Ce^{-t},$$

Para encontrar A, B y C multiplicamos por$(s-1)^2$ y tomamos límite para $s \to 1$ tenemos $3/2 = A$. Multiplicando por $s+1$ y tomando límite para $s \to -1$ tenemos $1/4 = C$. Finalmente valuando en $s = 0$ tenemos $2 = 3/2 - B + 1/4$ de donde $B = 1/4$.Por lo tanto la solución es

$$\frac{3}{2}e^t t + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t}.$$

7.1. La función de transferencia

Dada una ecuación diferencial lineal no homogénea, por ejemplo

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

con condiciones iniciales $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$, aplicamos el método de Laplace y obtenemos la ecuación:

$$s^2Y(s) - sy_0 - y_1 + asY(s) - ay_0 + bY(s) = F(s)$$

despejando tenemos

$$Y(s) = \frac{(s+a)y_0 + y_1}{s^2 + as + b} + \frac{F(s)}{s^2 + as + b}$$

Llamamos $H(s) = (s^2 + as + b)^{-1}$ y tenemos

$$y(t) = \mathcal{L}-1(y(t)) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)(s+a)y_0 + y_1)) + \mathcal{L}^{-1}(H(s)F(s))$$

Notemos que $y^h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)(s+a)y_0 + y_1))$ es una solución del problema homogéneo que satisface las condiciones iniciales y por otra parte $y^n(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)F(s))$, es una solución del problema no homogéneo con condiciones iniciales $y_0 = 0 = y_1$.

La función $H(s)$ se llama función de transferencia y puede verse que $h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s))$ es la respuesta del sistema a un impulso unidad aplicado en $t = 0$, por lo cual $h(t)$ se llama respuesta a impulso.

7.2. La convolución de funciones

En la sección anterior vimos que es conveniente saber invertir un producto de transformadas esto es, dados $\mathcal{L}(g(t))$ y $\mathcal{L}(h(t))$, queremos encontrar $f(t)$ tal que $\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(g(t))\mathcal{L}(h(t))$.

Ejercicio 38. *Encontrar $\{c_n\}$ en función de $\{a_n\}$ y$\{b_n\}$ tal que*

$$\sum_{n\geq 0} c_n x^n = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \sum_{n\geq 0} b_n x^n$$

El análogo continuo es muy parecido.

Proposición 39. *Si $G(s) = \mathcal{L}(g(t))$ y $H(s) = \mathcal{L}(h(t))$ existen para $s > a \geq 0$, entonces se cumple*

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(g(t))\mathcal{L}(h(t)).$$

donde

$$f(t) = \int_0^t g(u)h(t-u)du.$$

La función $f(t)$ se llama convolución de g y h.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t))(s) &= \int_0^\infty (\int_0^t g(u)h(t-u)du)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty \int_u^\infty g(u)h(t-u)e^{-st}dtdu \quad v = t-u \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty g(u)h(v)e^{-s(u+v)}dvdu \\
&= \int_0^\infty g(u)e^{-su}du \int_0^\infty h(v)e^{-sv}dv \\
&= G(s)H(s).
\end{aligned}$$

□

La convolución de funciones satisface reglas similares a las de un producto, por lo cual se lo llama producto de convolución y se lo denota por $g*h$. Puede verse que es conmutativo y distributivo respecto a la suma de funciones.

7.3. Forma de pensar la convolución: Problema de los desechos radiactivos

Una fabrica o planta nuclear produce residuos nucleares y los va acumulando en un basurero. Hay una función $f(t)$, que da la velocidad con que se producen los desechos, esto es dados dos tiempos t_1 y t_2 con intervalo δt lo desechado es aproximadamente $d(t) \sim f(t)\delta t$

El problema es el siguiente: si se comienza a contar en $t = 0$ ¿cuánto desecho se acumula al cabo de un tiempo t?.

Debemos tomar en cuenta que según la ley de decaimiento radiactivo, lo que queda de una cantidad inicial A_0 al cabo de un tiempo t es $A_0 e^{-kt}$.

Si dividimos el intervalo $[0, t]$ en n subintervalos de longitud $\Delta u = t/n$ con nodos $u_1, \ldots, u_n$ la cantidad desechada en el i-ésimo intervalo es aproximadamente $f(u_i)\Delta u$

Al pasar un tiempo t quedara:

$$f(u_i)(\Delta u)e^{-k(t-u_i)}$$

(por el tiempo que estuvo en la pila).

Sumando sobre i tendremos la cantidad $D(t)$, acumulada en el tiempo t

$$D(t) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)e^{-k(t-u_i)}\Delta u$$

Cuando Δu tiende a 0 la cantidad tiende a

$$\int_0^t f(u)e^{-k(t-u)}du = f(t) * e^{-kt}$$

Esto es la convolución de la velocidad de producción de residuos por la tasa de decaimiento radiactivo del mismo.

Si no hubiese decaimiento ($k = 0$) tendríamos

$$f(t) * 1 = \int_0^t f(u)du,$$

que es la ley de acumulación cuando se conoce la tasa de producción.

En el caso en que lo acumulado tendiera a crecer linealmente con el tiempo en lugar de decaer, tendríamos: $f(t) * t$ Por ejemplo esto podría dar el peso acumulado por la producción en una granja avícola. Se producen pollitos a una cierta tasa y el peso de estos crece linealmente con el tiempo.

Ejemplo 40. *Sabemos que* $\mathcal{L}(1) = 1/s$ *t* $\mathcal{L}(e^t) = 1/(s-1)$ *¿Cuál será la inversa de* $1/(s(s-1))$*?.*

Si calculamos la convolución:

$$e^t * 1 = \int_0^t e^u du = e^u|_{u=0}^{u=t} = -1 + e^t$$

También habríamos podido calcular la inversa descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{1}{s(s-1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}$$

de donde $\mathcal{L}^{-1}(1/)s(s-1))) = -1 + e^t$*.*

7.4. Funciones de escalón y la inversa de la transformada de Laplace

Al estar definida mediante una integral la transformada de Laplace se comporta bien con respecto a funciones no muy discontinuas como lo son las funciones de escalón. Estas son funciones que toman un número finito de valores y son discontinuas en un número finito de puntos (o más generalmente en un conjunto discreto de puntos).

La función básica $u(t)$ a partir de la cual el resto puede escribirse como combinación lineal de traslaciones de $u(t)$ es la llamada función de Heaviside:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Notemos que la transformada de Laplace de $u(t)$ es $1/s$ para $s > 0$ idéntica a la transformada de la función constante 1. Esto pone en evidencia que los valores que toma $f(t)$ para $t < 0$ no son tomados en cuenta por la transformada de Laplace y por lo tanto no hay posibilidades de que una inversa los recupere. Para evitar problemas de definición de la inversa tomaremos

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s) = u(t)f(t)$$

donde $f(t)$ es cualquier función cuya transformada es $F(s)$ y u es la función de Heaviside.

Notación: denotaremos con u_c a la trasladada de u por c, esto es, $u_c(t) = u(t-c)$. Vale 0 antes de $t = c$ y 1 después.

La transformada de u_c con $c \geq 0$ se calcula fácilmente:

$$\mathcal{L}(u_c(t)) = \int_0^\infty e^{-st} u_c(t) dt = \int_c^\infty e^{-st} dt = \frac{e^{-cs}}{s}$$

Más generalmente tenemos

Teorema 41. *Si $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ existe para $s > a \geq 0$ y $c \geq 0$ entonces*

$$\mathcal{L}(u_c(t) f(t-c)) = e^{-cs} \mathcal{L}(f(t)) = e^{-cs} F(s)$$

Recíprocamente si $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$ entonces

$$u_c(t) f(t-c) = \mathcal{L}^{-1}(e^{-cs} F(s))$$

Demostración. Ejercicio para el lector. □

Ejemplo 42. *Encuentre la transformada inversa de $F(s) = \frac{2-e^{-3t}}{s^2}$.*

Sabemos que $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$ y por el teorema anterior e^{-3s}/s^2 es la transformada de $u_3(t)(t-3)$ luego usando linealidad tenemos

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = 2t - u_3(t)(t-3).$$

Esto se puede escribir también como:

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t < 3 \\ t+3 & \text{si } t > 3 \end{cases}$$

8. Series de Fourier

Supongamos que tenemos una ecuación lineal a coeficientes constantes y consideramos el problema no homogéneo, por ejemplo $y'' + y = f(t)$, ya hemos visto como resolverlo en el caso en que $f(t) = \operatorname{sen} \lambda t$ o $f(t) = \cos \lambda t$ con soluciones y_λ^s, y_λ^c respectivamente. Si $f(t)$ fuese una combinación lineal de funciones de la forma $\operatorname{sen} \lambda_k t$ y $\cos \lambda_k t$ podríamos resolver el problema usando el principio de superposición: La combinación lineal

$$y(t) = \sum_k a_k y_{\lambda_k}^s + \sum_k b_k y_{\lambda_k}^c$$

será solución del problema

$$y'' + y = \sum_k a_k \operatorname{sen} \lambda_k t + \sum_k b_k \cos \lambda_k t$$

El análisis de Fourier trata sobre cuales funciones pueden escribirse de esta forma como se calculan los coeficientes a_k y b_k.

Para simplificar tomaremos $\lambda_k = k \quad k \in \mathbb{N}_0$. Supondremos que $f(t)$ puede descomponerse como serie de la forma:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} kt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos kt$$

y trataremos de encontrar los a_k y b_k. Esto es similar al problema de algebra lineal que consiste en encontrar los coeficientes c_i que permiten expresar a un vector v como combinación de elementos de una familia w_i. Recordemos que si los w_i no generan el espacio el problema puede no tener solución. Por otra parte si los w_i no son linealmente independientes la solución en caso de existir no será única. Un caso en que uno se asegura la independencia lineal y puede hallar fácilmente los c_i es cuando los w_i son no nulos y ortogonales entre si con respecto a un producto escalar $<,>$. En tal caso los c_i vienen dados por

$$c_i = \frac{< v, w_i >}{< w_i, w_i >}.$$

En nuestro caso podremos hacer exactamente lo mismo una vez que probemos el siguiente

Teorema 43. *Las funciones* $\{\cos nt\}_{n=0}^{\infty}, \{\operatorname{sen} nt\}_{n=1}^{\infty}$ *son ortogonales entre si respecto al producto escalar*

$$< f(t), g(t) >= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

Además $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 ntdt = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 ntdt = \pi$ *para todo* $n > 0$

Demostración. Daremos una demostración que usa el hecho que las funciones $\cos nt$ y $\operatorname{sen} nt$ satisfacen la ecuación diferencial $y'' + n^2 y = 0$. Sea u_n una solución de dicha ecuación y v_m una solución de $y'' + m^2 y = 0$ con $n^2 \neq m^2$ entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} n^2 u_n(t) v_m(t) dt = -\int_{-\pi}^{\pi} u_n'' v_m dt$$

pero integrando por parte tenemos:

$$-\int_{-\pi}^{\pi} u_n'' v_m dt = -u_n' v_m|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} u_n' v_m' dt$$

Ahora bien, $-u_n' v_m|_{-\pi}^{\pi}$ se anula si $v_m = \operatorname{sen} mt$ y también si $u_n = \cos nt$, más aún, cuando $u_n = \operatorname{sen} nt$ y $v_m = \cos mt$ tenemos que $u_n'(\pi)v_m(\pi) = u_n'(-\pi)v_m(-\pi)$ y se tiene $-u_n' v_m|_{-\pi}^{\pi} = 0$ Luego

$$\int_{-\pi}^{\pi} n^2 u_n(t) v_m(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} u_n' v_m' dt$$

si hubiéramos comenzado con $u_n m^2 v_m$ y usábamos $v_m'' = m^2 v_m$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} m^2 u_n(t) v_m(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} u_n' v_m' dt$$

como supusimos $m^2 \neq n^2$ u_n y v_m deben ser ortogonales. Queda sólo por considerar el caso

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nt \cos nt \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} 2nt}{2} dt = 0$$

que queda como un simple ejercicio. $\square$

Corolario 44. *Si*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} kt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos kt$$

entonces

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt$$

Demostración. Multiplicar ambos miembros por $\sin nt$ o $\cos nt$ e integrar entre $-\pi$ y π. $\square$

Ejemplo 45. *Consideremos la función*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi < t < 0 \\ -1 & \text{si } 0 < t < \pi \end{cases}$$

En este caso la función es impar por lo cual sólo debemos considerar los términos correspondientes a $\sin nt$*, más aún, para calcular los coeficientes basta integrar entre* 0 *y* π *y multiplicar por 2. Tenemos entonces*

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin nt dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nt dt = \frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)$$

La serie de Fourier queda entonces:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n \text{ impar}} \frac{\sin nt}{n}$$

Nos preguntamos si la serie será igual a la función de la cual partimos. Usaremos el siguiente teorema que no demostraremos:

Teorema 46. *Si* f *y* f' *son continuas a trozos (con un número finito de discontinuidades en* $[-\pi.\pi]$*), y se cumple* $f(t) = f(t+2\pi)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ *se tiene*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} kt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos kt = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt dt \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt dt$$

y

$$f(t_0^+) = \lim_{t\to t_0 \ t>t_0} f(t) \quad f(t_0^-) = \lim_{t\to t_0 \ t<t_0} f(t)$$

Otras formas en que podemos escribir la serie $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} kt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos kt$.

Si tomamos $b_0 = \frac{a_0}{2}$ y escribimos (a_n, b_n) en coordenadas polares de tal forma que $(r_n \cos\phi_n, r_n \sin\phi_n) := (a_n, b_n)$ teneos la igualdad:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_n \sin(kt + \phi_k) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} kt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos kt$$

Si usamos las fórmulas $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ y reemplazamos tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} kt+\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos kt &= \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i}+\sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2} \\
&= \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-ia_k+b_k}{2} e^{ikt}+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k+ia_k}{2} e^{-ikt} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}
\end{aligned}$$

donde $c_k=\frac{b_k-ia_k}{2}, \quad k>0$ y $c_k=\bar{c}_{-k}\ \forall k$.

Notemos que e^{imt} y e^{int} son ortogonales en $[-\pi,\pi]$ para $m\neq n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imt} e^{int} dt=0 \quad m\neq n$$

Ejemplo 47. *Aplicación: Si tenemos un anillo con una distribución inicial de temperatura $T(x)$ ¿cómo cambia con el tiempo?. Llamemos $u(x,t)$ a la distribución de temperatura en el punto x en el instante t. Se sabe que $u(x,t)$ satisface la ecuación del calor:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Para resolverla, planteamos una solución de la forma

$$u(x,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(t) e^{2\pi ikx}$$

asumiendo que la derivada de la serie es la serie de las derivadas tenemos se debe cumplir que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\partial c_k(t) e^{2\pi ikx}}{\partial t} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 c_k(t) e^{2\pi ikx}}{\partial x^2} \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k'(t) e^{2\pi ikx} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} -4\pi^2 k^2 c_k(t) e^{2\pi ikx}
\end{aligned}$$

De aquí obtenemos que $c_k'(t)=-4\pi^2k^2c_k(t)$ por lo cual $c_k(t)=c_k(0)e{-}4\pi^2k^2t$. Para determinar $c_k(0)$ notamos que al valuar en $t=0$ se obtiene

$$T(x)=u(x,0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(0) e^{2\pi ikx}$$

por lo cual

$$c_k(0) = \int_0^1 T(x)e^{-2\pi ikx}dx \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Entonces tenemos

$$u(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\int_0^1 T(y)e^{-2\pi iky}dy)e^{-4\pi^2k^2t}e^{2\pi ikx}$$

que bajo ciertas hipótesis podemos escribir como:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^1 T(y)(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi iky}e^{-4\pi^2k^2t}e^{2\pi ikx})dy \\ &= \int_0^1 T(y)(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi ik(x-y)}e^{-4\pi^2k^2t})dy \\ &= \int_0^1 T(y)g(x-y,t)dy \\ &= T * g(x,t) \end{aligned}$$

donde $f * h(x) = \int_0^1 f(y)h(x-y)dy$ *es el producto de convolución y* $g(z,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi ik(x-y)}e^{-4\pi^2k^2t}$ *se llama el núcleo de calor o la solución fundamental de la ecuación del calor o la función de Green para la ecuación del calor.*

8.1. Transformada de Fourier

La extensión del análisis de Fourier a funciones no periódicas se conoce con el nombre de transformada de Fourier. Para esto vemos a una función f definida en toda la recta real como límite de funciones f_L que coinciden con f en el intervalo $[-L, L]$ y se extienden periódicamente fuera de él, es decir $f_L(x+2L) = f_L(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Así tenemos que si f tiene derivada continua a trozos, la descomposición en serie de Fourier de f_L es

$$f_L = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{\pi k}{L}x}$$

donde

$$c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(y)e^{-i\frac{\pi k}{L}y}dy$$

Definimos el *espectro de frecuencias* correspondiente a L que es el conjunto $\{\ldots, -\frac{3\pi}{L}, -\frac{2\pi}{L}, -\frac{\pi}{L}, 0, \frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \frac{3\pi}{L}, \ldots\}$, donde $\omega_k = \frac{k\pi}{L}$ es la k-ésima frecuencia.

Si definimos $\mathcal{F}f(\frac{k}{L}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f_L(y)e^{-i\frac{\pi k}{L}y}dy$ tenemos que

$$\begin{aligned} f_L(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L}(\int_{-L}^{L} f_L(y)e^{-i\frac{\pi k}{L}y}dy)e^{i\frac{\pi k}{L}x} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}(\int_{-L}^{L} f_L(y)e^{-i\frac{\pi k}{L}y}dy)e^{i\frac{\pi k}{L}x}(\omega_{k+1} - \omega_k) \end{aligned}$$

Al hacer tender L a ∞ manteniendo $\xi = \frac{k\pi}{L}$ la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\frac{k}{L})e^{i\frac{\pi k}{L}x}\frac{\pi}{L}$ se aproxima a una suma parcial correspondiente a la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi)e^{i\pi\xi x}d\xi$$

y definiendo $Ff(\frac{k}{L}) = \int_{-L}^{L} f_L(y)e^{-i\frac{\pi k}{L}y}dy$ Tenemos que

Dada una funci Fourier fue el primero en usar estas series para resolver la ecuación del calor y otras ecuaciones diferenciales. El suponía que toda función podía expresarse como serie de Fourier. Hubo varias demostraciones falsas de este resultado hasta que Paul Du Bois. Reymond probó:

Teorema 48. *(Du Bois- Reymond)Existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua y periódica (de período 2π) tal que* $\limsup \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) = \infty$.

Sin embargo, los coeficientes determinan la función:

Teorema 49. *(Fejér) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y periódica (de período 2π), entonces $\sum_{k=-n}^{n} \frac{n+1-|k|}{n+1}\hat{f}(k)e^{ikt}$ converge puntualmente a $f(t)$ en $[-\pi, \pi]$ cuando $n \to \infty$.*

Algunos resultados acerca de las convergencia de las series de Fourier:

Teorema 50. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y periódica (de período 2π). Si $\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|$ converge entonces $\sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt}$ converge uniformemente a $f(t)$ en $[-\pi, \pi]$ cuando $n \to \infty$.*

Teorema 51. *Si $\sum_{-n}^{n} |a_k|$ converge entonces $\sum_{-n}^{n} a_k e^{ikt}$ converge uniformemente a una $g(t)$ continua con $\hat{g}(k) = a_k$.*

Teorema 52. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y periódica (de período 2π). Si $\sum_{-\infty}^{\infty} |k\hat{f}(k)|$ converge entonces f es continuamente diferenciable y $\sum_{k=-n}^{n} ik\hat{f}(k)e^{ikt}$ converge uniformemente a $f'(t)$ en $[-\pi, \pi]$ cuando $n \to \infty$.*

Finalmente Carleson en 1964 dió una respuesta final al problema de la convergencia:

Teorema 53. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in L^1([-\pi, \pi])$, entonces $\sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt}$ converge a $f(t)$ para casi todo $t \in [-\pi, \pi]$.*

Para entender el enunciado del teorema necesitamos saber que es $L^1([-\pi, \pi])$ y que quiere decir para casi todo $t \in [-\pi, \pi]$. Esto último quiere decir que vale para todos los puntos excepto un conjunto de medida nula y un conjunto de medida nula es uno tal que dado cualquier $\epsilon > 0$ puede ser encerrado en una unión de intervalos $[a_n, b_n]$ con $\sum |b_n - a_n| < \epsilon$.

En un intervalo $[a.b]$ se puede definir una nueva noción de integral que extiende a la integral de Riemann. Por ejemplo, la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

llamada función de Dirichlet, no tiene integral de Riemann ya que sus sumas inferiores son siempre 0 y sus sumas superiores son siempre 1, independientemente de la partición que se tome. En cambio su integral de Lebesgue vale 0, ya que coincide con la función constante 0 a excepción de un conjunto de medida nula.

9. Teorema de existencia y unicidad

En esta sección probaremos el teorema de existencia y unicidad para la ecuación $x' = F(x, t)$ con condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ donde $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $F : \mathbb{R}^{n+1}\mathbb{R}^n$ es una función que satisface la condición de Lipschitz:

$$||F(x, t) - F(y, t)|| \leq K|x - y|| \quad x, y \in D$$

para cierta constante K.

Teorema 54 (Unicidad)**.** *Sea $I = [t_0 - a, t_0 + a]$ y $\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n : ||y - y_0|| \leq b\}$. Sea $F : I \times \Omega \to \Omega$ una función continua y Lipschitz respecto* *de las n últimas variables con constante K. Supondremos que F esta acotada en $I \times \Omega$ por una constante M. Dado el problema de valores iniciales $y' = F(t, y(t), \quad y(t_0) = y_0$ si existe una solución $y(t)$ definida en algún subintervalo cerrado de $(t_0 - K^{-1}, t_0 + K^{-1})$, esta debe ser única.*

Demostración. Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos soluciones que satisfacen la misma condición inicial $x(t_0) = x_0 = y(t_0)$. Sabemos también que satisfacen la ecuación integral:

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(u(s), s)ds$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} ||x(t) - y(t)|| &= ||\int_{t_0}^{t} F(x(s), s)ds - \int_{t_0}^{t} F(y(s), s)ds|| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} ||F(x(s), s) - F(y(s), s)||ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} K||x(s) - y(s)||ds \end{aligned}$$

y esto a su vez implica que si $|t - t_0| < K^{-1}$

$$||x(t) - y(t)|| \leq |t - t_0|K \max_{s \in [t_0, t]} ||x(s) - y(s)|| < \max_{s \in [t_0, t]} ||x(s) - y(s)||$$

Lo cual es absurdo,pues t puede ser cualquier elemento en el intervalo. $\square$

Teorema 55 (Existencia). *Sea $I = [t_0 - a, t_0 + a]$ y $\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n : ||y - y_0|| \leq b\}$. Sea $F : I \times \Omega \to \Omega$ una función continua y Lipschitz respecto de las n últimas variables con constante K. Supondremos que F esta acotada en $I \times \Omega$ por una constante M. Dado el problema de valores iniciales $y' = F(t, y(t), \quad y(t_0) = y_0$ existe una solución $y(t)$ definida en el intervalo $J = (t_0 - \delta, t_0 + \delta$ donde $\delta = \min\{a, b/M\}$.*

Demostración. Sea $y_0(t) \equiv y_0$ y definamos la sucesión

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(y_{n-1}(s), s)ds$$

Dejemos por un momento la verificación de que esta sucesión está bien definida y veamos que converge. Para esto la podemos escribir de manera telescópica:

$$y_n(t) - y_0 = \sum_{k=1}^{n} y_k(t) - y_{k-1}(t)$$

de tal manera que

$$y(t) = \text{lím}\, y_n(t) = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) - y_{k-1}(t)$$

Para ver que esta serie converge uniformemente en el intervalo J, probaremos por inducción que

$$||y_{l+1}(t) - y_l(t)|| \leq MK^l \frac{|t-t_0|^{l+1}}{l+1!} \leq \frac{M}{K} K^{l+1} \frac{\delta^{l+1}}{l+1!}$$

lo cual implica por el criterio de comparación con la serie $\frac{M}{K} e^{L\delta} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{K\delta^l}{l!}$ que nuestra serie es uniformemente convergente en J. Veamos que $y(t) = \text{lím}_{n\to\infty} y_n(t)$ es solución del problema: Claramente cumple con la condición inicial y para ver que satisface la ecuación integral basta ver que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} F(s, y_n(s))ds \to \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))ds$$

esto se sigue de:

$$\begin{aligned}
||\int_{t_0}^{t} F(s, y_n(s))ds - \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))ds|| &\leq \int_{t_0}^{t} ||F(s, y_n(s)) - F(s, y(s))||ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} K||y_n(s)) - y(s)||ds \\
&\leq K|t-t_0| \sup_{s\in J} ||y_n(s)) - y(s)|| \\
&\leq K\delta \sup_{s\in J} ||y_n(s)) - y(s)||
\end{aligned}$$

Como y_n tiende uniformemente a $y(t)$ este último término puede hacerse arbitrariamente pequeño y se tiene el resultado.

Para ver que la sucesión $y_n(t)$ está bien definida hay que probar que $(t, y_k(t))$ cae siempre en el dominio de definición de F. Probaremos por inducción que si $\delta = \text{mín}\{a, \frac{b}{M}\}$:

$$|t - t_0| \leq \delta \implies ||y_k(t) - y_0|| \leq b \quad \text{si } (t, y_k(t)) \in J \times \Omega$$

En efecto, vale para $k = 0$ y suponiendo que vale para $k \geq 0$ veamos que valdrá para $k + 1$: sea t tal que $|t - t_0| \leq \delta$ entonces,

$$||y_{k+1}(t) - y_0|| = ||\int_{t_0}^{t} F(s, y_k(s))ds|| \leq \int_{t_0}^{t} ||F(s, y_k(s))||ds \leq M|t - t_0| \leq M\frac{b}{M} \leq b$$

$\square$

10. Funciones analíticas

Si $f(z)$ es una función de la variable compleja $z = x + iy$, definida en un entorno del punto z_0, definimos:

$$f'(x_0 + iy_0) = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + iy_0 + \Delta x + i\Delta y) - f(x_0 + iy_0)}{\Delta x + i\Delta y}$$

cuando este límite existe lo llamamos la derivada de $f'(z_0)$ en z_0 y decimos que f es diferenciable en z_0.

Definición 56. *Una función f es analítica en el punto z_0 si existe un entorno de z_0 tal que f es diferenciable en todos los puntos del entorno.*

Ejemplo 57. *La función $f(z) = z^2$ es analítica en todo punto.*

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} z + z_0 = 2z_0$$

Ejemplo 58. *La función $\bar{z} = x - iy$ no es análitica en ningún punto.*

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}$$

pero si hacemos tender z a z_0 por puntos de la forma $z = x + iy_0$, $f'(z_0) = \lim_{x\to x_o} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$,

En cambio haciendo tender por $z = x_0 + iy$ tenemos: $f'(z_0) = \lim_{x\to x_o} \frac{-i(y - y_0)}{i(y - y_0)} = -1$, por lo tanto no existe el límite $f'(z_0)$ para ningún z_0.

La existencia del límite implica que existen los límites cuando hacemos $y = y_0$ y variamos x y también cuando hacemos $x = x_0$ y hacemos variar y:

$$\begin{aligned} f'(x_0 + iy_0) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0))}{\Delta x} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f'(x_0+iy_0) &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)+i(v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0))}{i\Delta y}\\
&= -iu_y(x_0,y_0)+v_y(x_0,y_0)
\end{aligned}
$$

En todos los puntos en que la función $f = u + iv$ sea diferenciable vale la igualdad de estos límites, que se conoce como Ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x.$$

Corolario 59. *Una función analítica f en un dominio D que toma sólo valores reales debe ser constante.*

Si $f = u(x,y)+iv(x,y)$ la hipótesis dice que $v \equiv 0$ en D y las condiciones de C-R implican que $u_x \equiv 0$ y $u_y \equiv 0$ en D esto dice que u debe ser constante en D.

Teorema 60. *Sea $f(x+y) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función definida en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ de tal forma que u y v son diferenciables con continuidad y satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann en su dominio. Entonces f es analítica en D.*

Demostración. Tenemos que ver que dado cualquier punto $z_0 = x_0+iy_0 \in D$ existe la derivada $f'(z_0)$. Para ello formamos el cociente incremental

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(x_0+iy_0+\Delta x+i\Delta y)-f(x_0+iy_0)}{\Delta x+i\Delta y} =\\
&= \frac{u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)+i(v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0))}{\Delta x+i\Delta y}
\end{aligned}
$$

y usamos la siguiente igualdad de cálculo vectorial

$$
\begin{aligned}
u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0) &= u_x(x_0,y_0)\Delta x+u_y(x_0,y_0)\Delta y+\eta_1(x,y)\\
v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0) &= v_x(x_0,y_0)\Delta x+v_y(x_0,y_0)\Delta y+\eta_2(x,y)
\end{aligned}
$$

donde $\eta_k/\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ tiende a 0 cuando $(x,y)\to(x_0,y_0)$

$$\frac{f(x_0+iy_0+\Delta x+i\Delta y)-f(x_0+iy_0)}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$=\frac{u_x(x_0,y_0)\Delta x+u_y(x_0,y_0)\Delta y+\eta_1(x,y)+i(v_x(x_0,y_0)\Delta x+v_y(x_0,y_0)\Delta y+\eta_2(x,y))}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$=\frac{u_x(x_0,y_0)(\Delta x+i\Delta y)+iv_x(x_0,y_0)(\Delta x+i\Delta y)+\eta_1(x,y)+\eta_2(x,y))}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)+\frac{\eta_1(x,y)+\eta_2(x,y))}{\Delta x+i\Delta y}$$

Donde hemos usado las ecuaciones de Cauchy-Riemann para reemplazar v_y por u_x y u_y por $-v_x$. Finalmente tomamos límite y obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x_0+iy_0) &= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(x_0+iy_0+\Delta x+i\Delta y)-f(x_0+iy_0)}{\Delta x+i\Delta y} \\ &= u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0) \end{aligned}$$

□

Definición 61. *Una función $u(x,y)$ es armónica en un dominio D si satisface $u_{xx}+u_{yy}=0$. Dada una función armónica $u(x,y)$, decimos que $v(x,y)$ es conjugada de u si $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ es analítica.*

La conjugada v esta definida a menos de constante aditiva. Si $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ y $\tilde{f}(x+iy)=u(x,y)+i\tilde{v}(x,y)$ son analíticas su diferencia también lo es y $v-\tilde{v}=-i(f-\tilde{f})$ sería una función analítica que toma sólo valores reales. Luego debe ser constante.

Ejemplo 62. *Dada la función $u(x,y)=x^2-y^2$ encontrar sus conjugadas. Primero derivamos respecto a x y planteamos la ecuación $v_y=u_x=2x$.*

Para resolver esta ecuación integramos respecto a y y obtenemos:

$$v=\int v_y dy=\int 2x dy=2xy+c(x)$$

Donde $c(x)$ es una función que solo depende de x. Para hallarla derivamos respecto a x y resolvemos

$$\frac{dc}{dx}=\frac{d(v-2xy)}{dx}=v_x-2y=-u_y-2y=0$$

Es decir que $v=2xy+c$ con c una constante arbitraria y la correspondientes funciones analíticas son $f(z)=z^2+d$ con d un número complejo arbitrario.

10.1. Las condiciones de Cauchy Riemann en coordenadas polares.

Para encontrar las ecuaciones de Cauchy-Riemann podríamos haber planteado las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial z}$$

obteniendo

$$u_x + iv_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial x} = -i(u_y + iv_y)$$

que traducido en términos de u y v corresponde a las ecuaciones de C-R.

De la misma forma podemos obtener relaciones entre u_r y v_θ si escribimos $f(z) = f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$.

Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = e^{i\theta}\frac{\partial f}{\partial z}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = rie^{i\theta}\frac{\partial f}{\partial z}$$

y por lo tanto:

$$u_r + iv_r = \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{ir}\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{1}{ir}(u_\theta + iv_\theta)$$

Esto da las siguientes ecuaciones para u y v:

$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta \quad u_\theta = -rv_r,$$

Que son las Ecuaciones de C-R en coordenadas polares.

10.2. Algunos ejemplos de funciones analíticas

Puede verse que la misma demostración empleada en análisis real muestra que si f, g son analíticas en dominios D_1 y D_2 respectivamente entonces:

1. $cf + g$ es analítica en $D_1 \cap D_2$

2. $f.g$ es analítica en $D_1 \cap D_2$.

3. f/g es analítica en $D_1 \cap D_2 \backslash \{z \in D_2 : g(z) = 0\}$.

4. $h(z) = f(g(z))$ es analítica en $g^{-1}(D_1) \cap D_2$.

5. Si f es analítica y $f'(z_0) \neq 0$, entonces existe una función analítica h definida en un entorno de $f(z_0)$ tal que $f(h(u)) = u$ en ese entorno y $h(f(z)) = z$ en un entorno de z.

Para ver esta última usamos el teorema de la función inversa en dos variables las condiciones de C-R y el hecho que analítica implica derivadas continuas, que probaremos más adelante.

Ejemplo 63. *$f(z) = z$ analítica, implica que z^n es analítica y que todo polinomio es analítico en todo el plano.*

Ejemplo 64. *Si P y Q son polinomios, entonces $\frac{P}{Q}$ es analítica en todo el plano menos los puntos que son raíces de Q (de cardinal menor o igual al grado de Q).*

Además de los polinomios, las series de potencias centradas en z_0 son analíticas dentro del círculo dado por su radio de convergencia.

Ejemplo 65. *$e^z = \sum_{k=}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ es analítica en todo el plano. Esto puede verse también usando la fórmula de Euler: $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ y viendo que satisface las condiciones de C-R.*

Ejemplo 66. $\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ *y* $\sinh z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$ *son analíticas por ser combinaciones lineales de analíticas, como así también,* $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ *y* $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

Ejemplo 67. *La inversa de e^z llamada* $\log z$ *es una función multivaluada ya que por ejemplo $e^{2n\pi i} = 1 \forall n \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto* $\log 1 = \{2n\pi i\}_{n\in\mathbb{Z}}$*. Pero se puede elegir una función analítica definida en $\{z = rei\theta : r > 0; -\pi < \theta < \pi\}$ que es inversa de e^z. Es fácil ver que la derivada de* $\log z$ *es $1/z$.*

11. Integrales

Nuestro propósito es definir integrales de funciones complejas sobre el plano complejo. Recordemos que en Análisis 3 vimos la siguiente definición de integral de línea de un campo vectorial:

Definición 68. *Sea* $\mathbf{F}$ *un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave* C *dada por una función* $\gamma(t), a \leq t \leq b$. *Entonces la integral de línea del campo* F *a lo largo de* γ *es*

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\gamma = \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}ds$$

donde $\mathbf{T}(t) = \gamma'(t)/|\gamma'(t)|$ *es el tangente unitario y* $ds = |\gamma'(t)|dt$ *corresponde a la longitud de arco.*

Comenzamos por definir una integral para una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde a y b son reales y $f(t) = u(t)v(t)$.

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt$$

Así

$$\mathfrak{Re} \int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathfrak{Re} f(t)dt \quad \mathfrak{Im} \int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathfrak{Im} f(t)dt$$

Más en general consideremos una curva $\gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$ en el plano complejo y definamos:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Notemos que en la definición se usa el producto de números complejos (que da otro complejo) a diferencia de la definición en $\mathbb{R}^2$ donde el producto (escalar) de dos vectores nos daba un número real.

Ejemplo 69. *Sea* $f(z) = z$ *y* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *cualquier curva del plano complejo, entonces*

$$\int_\gamma zdz = \int_a^b \gamma(t)\gamma'(t)dt = \frac{\gamma^2(b) - \gamma^2(a)}{2}$$

Ejemplo 70. *Tomemos* $\gamma(t) = e^{it}$ *para* $t \in [a,b]$ *y* $f(z) = z^n$. *Entonces*

$$\int_\gamma f(t)dt = \int_a^b \gamma^n(t)\gamma'(t)dt = \int_a^b e^{nit} ie^{it}dt = \int_a^b ie^{(n+1)it}dt$$

Así si $a = 0$ *y* $b = 2\pi$ *tenemos*

$$\int_\gamma f(t)dt = \int_0^{2\pi} ie^{(n+1)it}dt = \begin{cases} \frac{ie^{(n+1)it}}{i(n+1)}|_0^{2\pi} = 0 \text{ si } n \neq -1 \\ 2\pi i \text{ si n} = -1 \end{cases}$$

Si definimos la integral con respecto a $\bar{z}$ como

$$\int_\gamma f d\bar{z} = \overline{\int_\gamma \bar{f} dz}$$

podemos definir

$$\int_\gamma f dx = \frac{1}{2}(\int_\gamma f dz + \int_\gamma f d\bar{z})$$
$$\int_\gamma f dy = \frac{1}{2i}(\int_\gamma f dz - \int_\gamma f d\bar{z})$$

Si escribimos a f como $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x.y)$ tenemos

$$\int_\gamma f dz = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma udy + vdx$$

que separa las partes real e imaginaria de la integral.

Un caso destacado es cuando las integrales de línea de f dependen sólo de los extremos de la curva γ. Por ejemplo hemos visto que $\int_\gamma zdz = \frac{\gamma^2(b)-\gamma^2(a)}{2}$. Recordemos el siguiente teorema de Análisis 3:

Teorema 71. *La integral de línea* $\int_\gamma pdx + qdy$, *definida en la región* D, *depende sólo de los extremos de* γ *si y sólo si existe una función* $U(x,y)$ *definida en* D *que satisface:*

$$\frac{\partial U}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = q$$

Demostración. Si existe una tal U tenemos

$$\begin{aligned}\int_\gamma pdx + qdy &= \int_a^b (\frac{\partial U}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}y'(t))dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}U(x(t), y(t))dt = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))\end{aligned}$$

donde se ve que sólo depende de los extremos de γ. Recíprocamente, si la integral depende sólo de los extremos fijamos un punto $(x_0, y_0) \in D$ y definimos $U(x,y) = \int_\gamma pdx + qdy$ donde γ es cualquier curva que une (x_0, y_0) con (x, y). Para calcular la derivada de U respecto a x podemos tomar una curva γ que en su parte final llegue a (x, y) mediante un segmento horizontal con y constante, esto hará que la U pueda escribirse como

$$U(x,y) = \text{cte} + \int_{x_1}^{x} pdx$$

donde x_1 es un punto a partir del cual y es constante. Derivando respecto a x es claro que $\partial U/\partial x = p$. De la misma forma, si nos aproximamos al final con una γ que sea vertical, vemos que $\partial U/\partial y = q$ □

Notemos que en la demostración no usamos que p, q y U fuesen reales, pudiendo por lo tanto ser complejos.

Corolario 72. *La integral $\int_\gamma fdz$ de una función continua f, depende sólo de los extremos de γ si y sólo si f es la derivada de una función analítica en D.*

Demostración. $\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma f(z)dx + if(z)dy$ sólo depende de los extremos de γ si y sólo si existe $F(z)$ que satisface $\partial F(z)/\partial x = f(z)$ y $\partial F(z)/\partial y = if(z)$. En tal caso F satisface las condiciones de Cauchy-Riemann y como f es continua por hipótesis, F debe ser analítica. Es decir f tiene una primitiva analítica. La recíproca es trivial. □

Este resultado es muy importante y permite concluir que $\int_\gamma (z-a)^n dz = 0$ para toda curva γ si n es un entero no negativo, ya que $F(z) = (z-a)^{n+1}/(n+1)$ es una primitiva analítica. Más aún, si n es un entero negativo distinto de 1 y la curva no contiene a a, la integral sigue siendo cero, ya que la F sigue siendo una primitiva analítica en $\mathbb{C}\backslash\{a\}$. Por otra parte, para $n = -1$

la integral puede no ser nula. Por ejemplo si tomamos la curva $\gamma(t) = a + re^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ tenemos:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i.$$

Este ejemplo nos muestra que será imposible definir una rama analítica del $\log z - a$ que este definida en un anillo alrededor de a, ya que en tal caso la integral calculada daría cero.

Ejemplo 73. *Se quiere calcular la integral de $z^{1/2}$ sobre una curva que une los puntos 3 y -3 tal que $\mathfrak{Im}\gamma_1 > 0$ salvo en los extremos y sobre γ_2 que une los mismos puntos y satisface $\mathfrak{Im}\gamma_2 < 0$. Para γ_1 retiramos del plano la semirecta $i\mathbb{R}_{<0}$ y en ese conjunto $F(z) = \frac{2}{3}z^{3/2}$ esta bien definida y es una primitiva de $z^{1/2}$. Por lo tanto*

$$\int_{\gamma_1} z^{1/2}dz = \frac{2}{3}z^{3/2}|_3^{-3} = \frac{2}{3}3^{3/2}(e^{3i\pi/2} - 1)$$

Para γ_2 extraemos del plano la semirecta $i\mathbb{R}_{>0}$ y en ese conjunto $F(z) = \frac{2}{3}z^{3/2}$ esta bien definida y es una primitiva de $z^{1/2}$. Por lo tanto

$$\int_{\gamma_2} z^{1/2}dz = \frac{2}{3}z^{3/2}|_3^{-3} = \frac{2}{3}3^{3/2}(e^{3\pi i/2} - e^{3\pi i})$$

11.1. El teorema de Cauchy

Teorema 74. *Sea R un dominio rectangular y ∂R el rectángulo que lo limita. Si la función $f(z)$ es analítica en R entonces*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

La demostración que daremos se debe a E. Goursat, quien logró quitar la hipótesis de continuidad de $f'(z)$ que requería la demostración de Cauchy.

Demostración. Suponemos que R tiene sus lados paralelos a los ejes y lo subdividimos en 4 rectángulos congruentes $R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)} y R^{(4)}$. Si llamamos $I(\gamma) = \int_\gamma f(z)dz$, tenemos:

$$I(\partial R) = I(\partial R^{(1)}) + I(\partial R^{(2)}) + I(\partial R^{(3)}) + I(\partial R^{(4)})$$

La orientación positiva de todos los rectángulos involucrados hace que los lados que aparecen dos veces, lo hagan con direcciones opuestas y su suma se cancele, siendo los lados que pertenecen a ∂R los únicos que son recorridos una sola vez.

La igualdad implica que no todas las integrales pueden ser menores a $1/4$ de $I(\partial R)$ y por lo tanto debe haber al menos un $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que

$$|I(\partial R^{(k)})| \geq \frac{1}{4}|I(\partial R)|$$

Si hubiese más de uno tomamos el primero que cumpla la desigualdad considerando primero los dos de la izquierda y luego el superior antes que el inferior. Llamamos a este rectángulo R_1 y repetimos el procedimiento con R_1 en lugar de R obteniendo R_2 y así sucesivamente. Se cumple

$$|I(\partial R_n)| \geq \frac{1}{4^n}|I(\partial R)| \tag{11}$$

Esta sucesión de rectángulos encajados debe converger a un punto z^*. Tomaremos una bola centrada en z^* de radio δ_1 tal que $f(z)$ sea analítica en ella. Dado $\epsilon > 0$ existe δ tal que

$$|z - z^*| < \delta \implies |\frac{f(z) - f(z^*)}{z - z^*} - f'(z^*)| < \epsilon$$

Podemos tomar $\delta < \delta_1$ y suponer que $R_n \subset B_\delta(z^*)$.

Ahora bien, usando que $\int_{\partial R_n} dz = 0 = \int_{\partial R_n} zdz$ podemos escribir

$$I(R_n) = \int_{\partial R_n} f(z) - f(z^*) - f'(z*)(z - z^*)dz$$

Como $R_n \subset B_\delta(z^*)$ y para $|z - z^*| < \delta$ vale $|f(z) - f(z^*) - f'(z*)(z - z^*)| < \epsilon|z - z^*|$ se tiene:

$$I(R_n) \leq \epsilon \int_{\partial R_n} |z - z^*||dz|$$

Pero $|z - z^*| \leq \frac{d_n}{2}$ donde d_n es la longitud de la diagonal de R_n. Si L_n es el perímetro de R_n tenemos entonces $I(R_n) \leq \epsilon d_n L_n$. Como $d_n = 2^{-n}D$ y $L_n = 2^{-n}L$ con D y L la longitud de la diagonal y el perímetro de R respectivamente, vale

$$|I(\partial R_n)| \leq 4^{-n}DL\epsilon$$

y usando (11):

$$I(\partial R) \leq DL\epsilon$$

como esto vale para cualquier ϵ debe ser $I(\partial R) = 0$.

$\square$

Para probar la fórmula integral de Cauchy necesitaremos la siguiente extensión de este resultado:

Teorema 75. *Sea f analítica en $R \backslash \{z_1, \ldots z_N\}$ y supongamos que satisface:*

$$\lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) = 0 \quad 1 \leq k \leq N.$$

Entonces $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$.

Demostración. La demostración basta hacerla para el caso de un único punto z_1. Tomamos $\epsilon > 0$ y trazamos 2 rectas paralelas horizontales y 2 paralelas verticales de tal forma que z_1 quede encerrado en un pequeño cuadrado central C donde suponemos que vale $|(z - z_1)f(z)| < \epsilon$, es decir $|f(z)| < \frac{\epsilon}{|z - z_1|}$. Luego

$$|\int_{\partial C} f(z)dz| \leq \int_{\partial C} |f(z)|.|dz| \leq \int_{\partial C} \frac{\epsilon}{|z - z_1|}|dz| \leq 8\epsilon$$

En la última desigualdad hemos usado que $|z - z_1| \leq \frac{2}{L}$ y $\int_{\partial C} |dz| = 4L$, donde L es la longitud de un lado de C. Como la desigualdad vale para todo $\epsilon > 0$ tenemos $\int_{\partial C} f(z)dz = 0$. Por otra parte, la integral original es la suma de las correspondientes integrales sobre los nueve rectángulos formados. Ahora bien, en ocho de ellas podemos aplicar el teorema anterior para ver que son nulas y en el central acabamos de ver que es también cero.

$\square$

Ahora extenderemos el teorema de Cauchy a integrales sobre curvas cerradas arbitrarias de una función analítica en un disco.

Teorema 76. *Si $f(z)$ es analítica en un disco abierto Δ, entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \tag{12}$$

para toda curva cerrada γ contenida en Δ.

Demostración. Definimos una función $F(z)$ en el disco por $\int_\sigma f(z)dz$ donde σ es la poligonal que consta de dos segmentos: uno que une $x_0 + iy_0$ con $x_0 + iy$ mientras el otro va de $x_0 + iy$ a $x + iy$. Por el teorema de Cauchy para rectángulos podríamos haber definido la misma función integrando sobre curvas que unen $x_0 + iy_0$ con $x + iy_0$ y $x + iy_0$ con $x + iy$. Es claro que de la primera definición obtenemos que $\partial F/\partial y = if(z)$, mientras que con la segunda definición obtenemos $\partial F/\partial x = f(z)$, por lo cual F es analítica en Δ y su derivada es $f(z)$. Esto implica que la integral sobre cualquier curva cerrada es nula.

□

También vale la siguiente extensión:

Teorema 77. *Sea f analítica en $\Delta\backslash\{z_1, \dots z_N\}$ y supongamos que satisface:*

$$\lim_{z\to z_k} (z - z_k)f(z) = 0 \quad 1 \le k \le N.$$

Entonces $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para toda curva cerrada $\gamma \subset \Delta$.

Demostración. La demostración es la misma que para el teorema anterior. Sólo hay que tener en cuenta que en la definición de la primitiva dada allí puede darse que alguno de los puntos z_i caiga en el rectángulo con vértices (x_0, y_0) y (x, y) en tal caso podemos evitarlos tomando un camino de tres segmentos paralelos a los ejes (en lugar de dos) si es que no hay puntos z_i con primera coordenada x_0 o segunda coordenada y_0. Si los hubiera necesitaremos cuatro segmentos paralelos a los ejes para llegar a (x, y) evitando todos los z_i. Es claro que dos caminos de esta forma definen el mismo valor de la integral por el teorema 75 y que la función así definida es una primitiva de f por lo cual la integral deberá ser nula. □

12. Fórmula integral de Cauchy

12.1. El índice de un punto respecto a una curva cerrada

Lema 78. *Sea $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ una curva suave a trozos que no contiene al punto a, entonces*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - a} = 2\pi i n \quad \text{para algún } n \in \mathbb{Z}$$

Demostración. Definimos

$$h(t) = \int_\alpha^t \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} dt.$$

Está bien definida y es continua en $[\alpha, \beta]$. Más aún es derivable salvo en un número finito de puntos y su derivada vale

$$h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a}$$

en todos los puntos en que $\gamma'(t)$ es continua. De aquí se sigue que la derivada de $e^{-h(t)}(\gamma(t) - a)$ se anula en casi todo punto y por ser una función continua debe ser constante. Como $\gamma(\beta) = \gamma(\alpha) \neq a$, tenemos $e^{-h(\beta)} = e^{-h(\alpha)} = 1$ por lo cual $h(\beta) = 2\pi i n, \ n \in \mathbb{Z}$. □

Definición 79. *El entero n dado por el lema anterior se llama índice del punto a respecto a la curva γ y se denota por $n(\gamma, a)$.*

Así se tiene:

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - a}$$

12.2. Fórmula integral de Cauchy

Teorema 80. *Sea $f(z)$ analítica en un disco abierto Δ y sea γ una curva cerrada en Δ. Para cualquier punto a que no pertenezca a γ vale*

$$n(\gamma, a).f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)dz}{z - a}, \tag{13}$$

donde $n(\gamma, a)$, es el índice de a con respecto a γ.

Demostración. Consideramos la función:

$$F(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

Esta función es analítica para $z \neq a$ y para $z = a$ satisface:

$$\lim_{z \to a} F(z)(z - a) = \lim_{z \to a}(f(z) - f(a)) = 0$$

Bajo estas hipótesis podemos aplicar el teorema de Cauchy a F y tenemos

$$\int_\gamma \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz = \int_\gamma F(z) dz = 0$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - a} dz = \int_\gamma \frac{f(a)}{z - a} dz = f(a) 2\pi n(\gamma, a).$$

$\square$