## ANALISIS MATEMATICO IV- Práctico $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$
## Números Complejos

(1) Escribir los siguientes números complejos en la forma $x + iy$ y dibujarlos.
   (a) $(2 - 3i)(2 + 3i)$
   (b) $\dfrac{(3+i)}{3-4i} - \dfrac{(2-i)}{8i}$
   (c) $\dfrac{1+2i}{3-4i} + \dfrac{2-i}{5i}$
   (d) $\dfrac{1}{(1-i)(2-i)(3-i)}$
   (e) $(1-i)^4$

(2) Para los siguientes números complejos $z$ determinar $\overline{z}$, $\mathrm{Re}(z)$ , $\mathrm{Im}(z)$ y $|z|$.
   (a) $z = 2i - 1$
   (b) $z = -2i$
   (c) $z = (4i)^2$
   (d) $z = (4 + 3i)^{-1}$
   (e) $\dfrac{(-1+3i)}{(2-i)}$

(3) Hallar el argumento de los siguientes números complejos.
   (a) $z = \dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$, (b) $z = \dfrac{i}{-2-2i}$, (c) $z = (\sqrt{3} - i)^6$.

(4) Probar que
   (a) $\overline{iz} = -i\overline{z}$.
   (b) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \, \overline{z}_2$.
   (c) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ y $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$
   (d) Probar que $z$ es real si y sólo si $z = \overline{z}$.

(5) Graficar en el plano los conjuntos donde $z$ satisface:
   (a) $|z| = 1$, (b) $|z - 1 + i| < 2$, (c) $|z + i| \geq 1$, (d) $|2z - i| = 4$.

(6) Graficar en el plano los conjuntos donde $z$ satisface:
   (a) $\mathrm{Im}(z) = 0$
   (b) $|3z + 2| < 1$
   (c) $0 < \arg z \leq \pi$
   (d) $\{\mathrm{Im}(z) \geq 2\} \cup \{\mathrm{Re}(z^2) > 0\}$
   (e) $\mathrm{Im}\Big(z + 1/z\Big) = 0$

(7) Usar la forma polar para simplificar las siguientes expresiones. Hallar en cada caso el módulo y el argumento principal del resultado.
   (a) $i(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)$
   (b) $\dfrac{3}{(\sqrt{3}-i)^2}$
   (c) $(1+i)^3$
   (d) $i^5 \cdot i^3$

(8) (a) Probar la identidad $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$

*Ayuda*: Tomar $S = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$ y calcular $(1 - z)S$.

(b) Mostrar que si $c$ es una raíz n-ésima de la unidad, $c \neq 1$, entonces

$$1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1} = 0$$

(9) Hallar todas las raíces de las siguientes ecuaciones y dibujarlas.

(a) $z^5 - 32 = 0$

(b) $z^2 - 2i = 0$

(c) $z^3 + 1 = 0$

(10) Hallar las raíces de la ecuación $z^4 + 4 = 0$ y usarlas para factorizar $z^4 + 4$ en producto de polinomios de grado dos con coeficientes reales.

(11) Representar gráficamente los siguientes conjuntos y determinar cuáles son abiertos, cerrados o acotados.

(a) $|z - (2 + i)| \leq 1$

(b) $\text{Im } z = 3$

(c) $|2z + 5| > 2$

(d) $|z - 4| \geq |z|$

(e) $0 < \arg z < \pi/4 \quad (z \neq 0)$

(f) $\pi/4 \leq \arg z \leq \pi/2 \quad (z \neq 0)$

(12) Probar que la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ puede ser escrita en la forma $z^2 + \overline{z}^2 = 2$.

(13) Usando el hecho de que $|z_1 - z_2|$ es la distancia entre los puntos $z_1$ y $z_2$, decir qué curvas describen los siguientes conjuntos:

(a) $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$

(b) $|z - 1| = |z + i|$.

(14) Probar la identidad trigonométrica de Lagrange:

$$1 + \cos\alpha + \cos(2\alpha) + \cdots + \cos(n\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right)}{2\operatorname{sen}(\alpha/2)}$$

*Ayuda:* Reemplazar $z = e^{i\alpha}$ en la identidad del ejercicio (8) (a).