ANALISIS MATEMATICO IV- Práctico 1
Ecuaciones diferenciales de primer orden

1. Comprobar si las funciones dadas son soluciones de la ecuación diferencial correspondiente:
a) $y'' - y = 0$, $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = \cosh t$.
b) $y'' + 2y' - 3y = 0$, $y_1(t) = e^{-3t}$, $y_2(t) = e^t$.
c) $2t^2y'' + 3ty' - y = 0$, para $t > 0$, $y_1(t) = t^{\frac{1}{2}}$, $y_2(t) = t^{-1}$.
d) $y' - 2ty = 1$, $f(t) = e^{t^2} \int_0^t e^{-s^2} ds + e^{t^2}$.

2. Dibujar aproximadamente el campo de direcciones determinado por cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales y esbozar algunas de sus curvas integrales.
i) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$
ii) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}$.
iii) $\frac{dy}{dx} = 1 + xy$.
iv) $y' = y(4 - y)$.

3. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.
a) $y' + y\sqrt{t}.\sin t = 0$,
b) $\dot{x} + x\cos t = 0$,
c) $y' + t^2y = 1$,
d) $\dot{y} + y = te^t$.

4. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales.
a) $y' - y = 2xe^{2x}$, $y(0) = 1$
b) $y'' + 2y' = xe^{-2x}$, $y(0) = a$, $y'(0) = b$
c) $tx' + 2x = sen(t)$, $x(\frac{\pi}{2}) = 1$

5. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones.
a) $y' + 3y = x + e^{-2x}$
b) $\dot{x} = 3\cos(2t) - \frac{x}{t}$
c) $(1 + x^2)y' + 4xy = \frac{1}{(1+x^2)^2}$

6. (*) Resolver el siguiente problema $y' = \frac{1}{e^y - x}$, $\quad y(1) = 0$. Sugerencia: considerar x como variable dependiente de y.

7. Dado el problema de valores iniciales
$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0,$$
se fija una función inicial $\varphi_0(t)$ y se genera una sucesión φ_n de funciones por medio de la fórmula de Picard:
$$\varphi_{n+1}(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_n(s))ds.$$
Para cada uno de los siguientes problemas determinar φ_n partiendo de $\varphi_0 = y(0)$. Si es posible, encontrar una estimación del intervalo I_n en el cual φ_n es una buena aproximación de la solución para algunos valores de $n = 1, 2, 3, 4$.

Analizar si es posible la convergencia de la sucesión $\{\varphi(t)\}$ hacia la función solución en cada caso.
a) $y' = 2(y+1), y(0) = 0.$
b) $y' = -y - 1, y(0) = 2.$
c) $y' = -\frac{y}{2} + t, y(0) = 0.$
d) $y' = y + 1 - t, y(0) = 1.$

8. a) Encontrar la solución de $x' = x^{1/2}$ que pasa por el punto (t_0, x_0) , donde $x_0 > 0$.
b) Encontrar todas las soluciones de esta ecuación que pasan por el punto $(t_0, 0)$.

9. Dada la ecuación $x'x = t$, estudiar existencia y unicidad de las soluciones para distintas condiciones iniciales (x_0, t_0).

10. La ecuación $x' = f(t, x)$ se dice *homogénea de grado cero* si f satisface $f(yt, yx) = f(t, x)$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Mediante la substitución $x = u(t)\, t$, mostrar que la ecuación puede reducirse a la forma de variables separadas
$$u' = \frac{f(1, u) - u}{t}.$$
Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones
i) $x'(tx + t^2) = x^2$, ii) $x't = x + te^{-2x/t}$.

11. Encontrar las soluciones de las siguientes ecuaciones.
a) $tx' + x = 3t^2 - 1$, para $t > 0$.
b) $x' - (\tan t)\, x = e^{\sin t}$, para $0 < t < \pi/2$.

12. Considerar la ecuación $t^2 x' + 2tx = 1$ en el intervalo $0 < t < \infty$.
a) Mostrar que toda solución tiende a cero cuando $t \to \infty$.
b) Encontrar la solución ϕ que satisface $\phi(2) = 2\phi(1)$.

13. La población de cierta comunidad aumenta con una velocidad proporcional a la cantidad de personas que tiene en cualquier instante $t > 0$.
a) Plantear y resolver la ecuación diferencial que satisface la población $p = p(t)$.
b) Si la población se duplicó en 5 años, cuándo se quintuplicará?

14. Resolver la Ecuación Logística: $\frac{dy}{dt} = r(1 - \frac{y}{K})y$.

15. Un tanque tiene inicialmente 160 litros de agua pura. Una solución de concentración salina de 100 g/l entra al tanque a razón de 1/2 litro por minuto, y se mezcla muy rápidamente (en nuestra idealización instantáneamente) con el agua del tanque. Simultáneamente se extrae líquido del tanque a razón de 1/2 litro por minuto.
a) Plantear y resolver la ecuación diferencial que satisface la cantidad de sal en el tanque como función del tiempo.
b) Es obvio que al tender el tiempo a infinito, la concentración de sal en el tanque debe tender a $100\, g/l$. Verificar que esto se cumple usando la función

hallada en el apartado anterior.
c) ¿Cuándo se tendrán 50 gramos de sal en el tanque?

16. Experimentos muestran que la tasa de cambio de la temperatura de la superficie de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del ambiente (ley de enfriamiento de Newton).
a) Determinar la ecuación diferencial que satisface la temperatura de un cuerpo.
b) Cuando una torta se extrae de un horno, su temperartura superficial es de 150^o C. Tres minutos más tarde es de 100^o C. ¿Cuánto tiempo tarda la torta en enfriarse a la temperatura de 50^o C si la temperatura ambiente es de 20^o C?