ANALISIS MATEMATICO IV- Continuación del Práctico 1
Ecuaciones exactas - Ecuaciones de segundo orden

1. Determinar si las siguientes ecuaciones diferenciales son o no exactas, si lo son halle la solución.

   a) $(2x+3)+(2y-2)y'=0$,

   b) $(2xy^2-2y)+(2x^2y+2x)y'=0$,

   c) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{ax+by}{bx+cy}$,

   d) $(y/x+6x)\,dx+(\ln x-2)\,dy=0$, $x>0$,

   e) $\dfrac{x\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}+\dfrac{y\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0$.

2. Muestre que las siguientes ecuaciones no son exactas, pero que si se los multiplica por el factor integrante dado sí resultan serlo:

   a) $x^2y^3+x(1+y^2)y'=0$, $\quad\mu(x,y)=1/xy^3$,

   b) $(x+2)\operatorname{sen} y\,dx+x\cos y\;dy=0$, $\quad\mu(x,y)=xe^x$,

3. Encuentre un factor integrante y resuelva la ecuación dada:

   a) $(3x^2y+2xy+y^3)\,dx+(x^2+y^2)\,dy=0$,

   b) $y\,dx+(2xy-e^{-2y})\,dy=0$,

   c) $[4(\frac{x^3}{y^2})+(\frac{3}{y})]\,dx+[3\frac{x}{y^2}+4y]\,dy=0$,

   d) $(3x+\frac{6}{y})+(\frac{x^2}{y}+3\frac{y}{x})\frac{dy}{dx}=0$.

4. Muestre que las ecuaciones siguientes son homogéneas, y encuentre las soluciones:

   a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2}$,

   b) $2y\,dx-x\,dy=0$,

   c) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+3y^2}{2xy}$,

   d) $(x^2+3xy+y^2)\,dx-x^2\,dy=0$

5. Encuentre la solución de las ecuaciónes siguientes:

a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y-x}{2x-y}$, b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y-x+5}{2x-y-4}$.

6. Resolver los siquientes problemas de valores iniciales:

   a) $\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}-4y=0,\;\; y(0)=1, y'(0)=0.$

   b) $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-10y=0,\;\; y(1)=5, y'(1)=2.$

   c) $\frac{d^2y}{dt^2}-6\frac{dy}{dt}+y=0,\;\; y(2)=1, y'(2)=1.$

7. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

   a) $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=0,$ b) $2\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+4y=0,$ c) $\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+y=0.$

8. Encontrar sistemas fundamentales de soluciones (reales y/o complejas) para las siguientes ecuaciones:
   i) $x''+x'-6x=0,$ ii) $x''-6x'+9x=0,$ iii) $x''-4x'+5x=0,$ iv)$x''+(3i-1)\,x'-3ix=0.$
   Para la primera ecuación, hallar la solución que satisface $\phi\,(0)=1$ y $\phi'\,(0)=0$.

9. Considerar la ecuación diferencial $y''+\lambda y=0$.

   a) Hallar todos los r reales o complejos tales que $\phi(t)=e^{rt}$ es solución. Determinar una base del espacio de soluciones y dar todas las soluciones de la ecuación.

   b) Encontrar los valores posibles de λ tales que la ecuación admita una solución ϕ no idénticamente nula que satisfaga $\phi(0)=\phi(3)$. Determinar cómo se restringen esos valores de λ si además se requiere que $\phi'(0)=-\phi'(3)$.

10. Considerar la ecuación $y''+\omega^2y=0$, con $\omega>0$.

    a) Hallar un sistema fundamental de soluciones complejas de la misma y a partir de él generar un sistema fundamental de soluciones reales de la ecuación.

    b) Expresar cualquier solución de la ecuación como combinación lineal de las soluciones fundamentales halladas.

    c) Hallar todas las soluciones de la ecuación inhomogénea $y''+\omega^2y=A\cos(\lambda t)$, consideranado por separado los casos $\lambda=\omega$ y $\lambda\neq\omega$.

11. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones por medio del método de variación de constantes:

    a) $\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+4y=te^{2t},$

b) $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + y = (t^2+1)e^{2t}$,

c) $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = te^{3t} + 1$.

12. *Método de reducción de orden.* Dada la ecuación no-homogénea
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x),$$
supondremos conocida una solución y_1 de la correspondiente ecuación homogénea y sea $y(x) := v(x).y_1(x)$. Mostrar que y satisface la ecuación no-homogénea dada si y sólo si v es una solución de
$$y_1(x)v'' + [2y_1'(x) + p(x)y_1(x)]v' = g(x).$$
Resolviendo esta última ecuación, integrando el resultado y luego multiplicando por $y_1(x)$ lleva a la solución general de la ecuación diferencial no-homogénea dada. Usar este método para resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 4x^2, \quad x > 0; \qquad y_1(x) = x$,

b) $(1-x)y'' + xy' - y = 2(x-1)^2e^{-x}, \quad 0 < x < 1; \quad y_1(x) = e^x$.

13. Usar reducción de orden para hallar la solución general de las siguientes ecuaciones.

a) $9\frac{d^2y}{dt^2} - 4t\frac{dy}{dt} + (4t^2-2)y = 0, \;\; y_1(t) = e^{t^2}$.

b) $(1-t^2)\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt} + 2y = 0, \;\; y_1(t) = t$.

c) $t^2\frac{d^2y}{dt^2} - t\frac{dy}{dt} + (t^2 - \frac{1}{4})y = 0, \;\; y_1(t) = \frac{sen\, t}{\sqrt{t}}$.