ANALISIS MATEMATICO IV- Práctico 2
Sistemas de ecuaciones lineales - Exponencial matricial

1. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones o muestre que no existe solución:

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

2. Encuentre la solución general y esquematice algunas trayectorias de los siguientes sistemas. Describa el comportamiento de las soluciones cuando cuando $t \to \infty$.

$$a)\ \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad b)\ \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad c)\ \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

3. Hallar la solución general de los sistemas de ecuaciones:

$$a)\ \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad b)\ \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

4. Resuelva los siguientes problemas de valores iniciales y describa el comportamiento de las soluciones cuando $t \to \infty$.

$$a)\ \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$b)\ \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Para resolver un sistema del tipo $t\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, proponer $\mathbf{x} = \xi t^r$, con ξ un vector constante no nulo. Muestre que ξ y r deben satisfacer la ecuación $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\xi = 0$. Deducir que para obtener soluciones no triviales, r debe ser una raiz de la ecuación característica $det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0$. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \text{b) } \quad t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

6. Sean

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Mostrar que $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)\}$ es l.d. para cada punto $t \in [0, 1]$, pero que $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ es l.i. sobre $[0, 1]$. Ayuda: si $a\mathbf{x}(t) + b\mathbf{y}(t) = 0, \forall t \in [0, 1]$, entonces $a\mathbf{x}'(t) + b\mathbf{y}'(t) = 0, \forall t \in [0, 1]$.

7. Determine si los siguientes conjuntos de funciones vectoriales son linealmente independientes en $-\infty < t < \infty$. Si son linealmente dependientes, encuentre la relación entre ellos.

   a) $\mathbf{x}(t) = (e^{-t}, 2e^{-t})$, $\quad \mathbf{y}(t) = (3e^{-t}, 0)$, $\quad \mathbf{z}(t) = (e^{-t}, e^{-t})$.
   b) $\mathbf{x}(t) = (2\text{sen}t, \text{sen}t)$, $\quad \mathbf{y}(t) = (\text{sen}t, 2\text{sen}t)$.

8. En este problema se ilustra cómo proceder cuando existe un autovalor triple (multiplicidad 3) con sólo dos autovectores linealmente independientes asociados. Considerar el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

   a) Verificar que $r = 1$ es un autovalor triple de $\mathbf{A}$, y que existen sólo dos autovectores asociados linealmente independientes:

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

   Hallar las dos soluciones l.i. correspondientes.
   b) Para encontrar una tercera solución proponer $\mathbf{x}^{(3)}(t) := \xi t e^t + \eta e^t$ y deducir que ξ y η deben satisfacer

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\xi = \mathbf{0}, \qquad (\mathbf{A} - \mathbf{I})\eta = \xi$$

   c) Muestre que $\xi = c_1\xi^{(1)} + c_2\xi^{(2)}$, con c_1 y c_2 constantes arbitrarias, es la solución más general de la ecuación $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\xi = \mathbf{0}$. Muestre que para resolver $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\eta = \xi$ hace falta tomar $c_1 = c_2$.
   d) Es conveniente elegir $c_1 = c_2 = 2$. Con esta elección comprobar que

$$\xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

   donde k_1 y k_2 son constantes arbitrarias. Encuentre entonces una tercera solución $\mathbf{x}^{(3)}$ L.I.

9. Exprese la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones en términos de funciones a valores reales y grafique algunas trayectorias describiendo el comportamiento de las soluciones para $t \to \infty$.

a) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, b) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$,

c) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ 9/5 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, d) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$.

10. Encuentre la solución del siguiente problema de Cauchy:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -30 \end{pmatrix}.$$

11. a) Probar que la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}$ converge uniformemente y absolutamente en cada conjunto $\{A \in M_n(\mathbb{C}) : \|A\| \leq r\},\ r > 0$.
b) Dada A una matriz $n \times n$ real o compleja, probar que la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ converge uniformemente como función de t, en todo intervalo cerrado y acotado $a \leq t \leq b$. Ayuda: usar el Lema de Weierstrass.

12. Sea A una matriz $n \times n$, real o compleja. Probar que:

$$\text{(a) } ||e^A|| \leq e^{||A||}, \qquad \text{(b) } \det e^A = e^{\operatorname{tr} A}.$$

Ayuda: para probar b) considerar la función $\beta(t) = \det(e^{tA})$ y verificar que satisface una ecuación diferencial lineal de primer orden. Hará falta calcular $d \det_I(A) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \det(I + tA)$.

13. Probar que la exponencial de matrices tiene las siguientes propiedades:

a) Si $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ son tales que $AB = BA$, entonces $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$. Proceder siguiendo los siguientes pasos:
i) Verificar que $X(t) = e^{tA+tB}$ satisface la e.d. matricial $X' = (A + B)X$, $X(0) = I$.
ii) Mostrar que $e^{tA}B = Be^{tA}\ \forall t$.
iii) Concluir que $\frac{d}{dt}e^{tA}e^{tB} = (A+B)e^{tA}e^{tB}$, luego usar la unicidad de soluciones de una E.D.O.

b) $\exp(-A) = [\exp(A)]^{-1}\ \ \forall A \in M_n(\mathbb{C})$.

c) Si $B = PAP^{-1}$ entonces $\exp(B) = P\exp(A)P^{-1}$.

d) $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, entonces $\exp(A) = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$.

14. Calcular e^{tA} si A es el operador en $\mathbb{R}^n$ con matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

15. a) Sea V_n, $n > 1$ el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que $n-1$ con coeficientes reales. Mostrar que V_n tiene una estructura de espacio vectorial real y calcular su dimensión.
b) Considerar el operador derivación $D = \frac{d}{dx} : V_n \to V_n$ y probar que es lineal. Encontrar su núcleo y la imagen.
c) Mostrar que $D^k = 0$ para cierto entero positivo k. Ayuda: considerar la matriz de D en la base $\{1, x, x^2, \dots x^{n-1}\}$.
d) Sea $H_t : V_n \to V_n$ el operador *desplazamiento en* t, definido por $H_t(p(x)) := p(x+t)$. Probar que $e^{tD} = H_t$, $\forall t$. Ayuda: para $p \in V_n$, calcular el desarrollo de Taylor de $p(x+t)$ centrado en x.

16. Resolver los siguientes sistemas

a) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, b) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, c) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

17. Hallar la solución general del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' = & y \\ y'' = & -x - y + y' \end{cases}$$

18. Sea L el operador lineal diferencial de orden n con coeficientes constantes definido por $L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y^{(0)}$.
a) Pasar a un sistema lineal equivalente de orden n, $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ y probar que el polinomio

característico de A esta dado por $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$.
b) Encuentre $L[x^n]$ y $L[e^{rx}]$.
c) Determine cuatro soluciones de la ecuación $y^{iv} - 5y'' + 4y = 0$. Forman las cuatro soluciones halladas un sistema fundamental?
d) Hallar la solución del siguiente PVI:

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1.$$

19. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:
a) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, b) $2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0$,
c) $y^{iv} - 4y''' + 4y'' = 0$, d) $y^{vi} + y = 0$,
e) $y^{(iv)} - 8y' = 0$.

20. Usar el método de variación de parámetros para encontrar una solución particular de la ecuación $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4t}$.

21. Hallar una solución particular de los siguientes sistemas por el método de coeficientes indeterminados:
a) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$, b) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ e^t \end{pmatrix}$.