ANALISIS MATEMATICO IV- Práctico 3
Transformada de Laplace - Problemas no-homogéneos

1. Determinar la transformada de Laplace de las siguientes funciones:
   a) t, b) t^n, c) $e^{at}\cos(bt)$, d) $e^{at}\text{sen}(bt)$, e) $\cos^2(at)$, f) $t^2\text{sen}(t)$.

2. Hallar la transformada de Laplace inversa de las siguientes funciones:
   a) $\frac{1}{s(s^2+4)}$, b) $\frac{s}{(s+a)^2+b^2}$, c) $\frac{s}{s^2-3s-12}$.

3. Resolver los siguientes problemas no-homogéneos de segundo orden:
   a) $y'' - 5y + 4y = e^{2t}, y(0) = 1, y'(0) = -1$,
   b) $y'' + y = t^2\text{sen}(t), y(0) = y'(0) = 0$,
   c) $y'' + y' + y = t^2, y(0) = 2, y'(0) = 0$.

4. Mediante la substitución $\phi(t) = y(t + t_0)$, resolver el problema,
$$y'' - 3y' + 2y = e^{-t}, \quad y(t_0) = 1, \quad y'(t_0) = 0$$

5. a) Mostrar que $\mathcal{L}\{f'''\}(s) = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$, con $F = \mathcal{L}\{f\}$.
   b) Resolver el siguiente problema,
$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^{4t}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

6. Resolver los siguientes problemas:
   a) $y'' + y = \text{sen}t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$,
   b) $y'' - 2y' + y = te^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

7. Determinar la solución general de la ecuación $y'' + \lambda^2 y = \sum_{n=1}^{N} a_n\text{sen}(n\pi t)$, donde $\lambda > 0$ y $\lambda \neq n\pi$, para $1 \leq n \leq N$. Ayuda: primero hallar la solución general de $y'' + \lambda^2 y = \text{sen}(n\pi t)$, n entero, $\lambda \neq n$.

8. Resolver los siguientes problemas no-homogéneos por transformada de Laplace:
   a) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
   b) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x} + e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9. Usando alguno de los métodos conocidos (var. de parámetros, transf. de Laplace o coefs. indeterminados) encontrar una solución particular de cada uno de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -4x + \sin t \end{cases}$,

b) $\begin{cases} x' = & x + y + z \\ y' = & -2y + t \\ z' = & 2z + \sin t \end{cases}$,

c) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$,

d) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{t} \end{pmatrix}$

10. Para $c \geq 0$, sea $H_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq c, \\ 1, & t > c \end{cases}$

a) Mostrar que $\mathcal{L}\{H_c(t)\} = \dfrac{e^{-cs}}{s}$, $s > 0$.

b) Sea $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Probar que $\mathcal{L}\{H_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}F(s)$. Ayuda usar la substitución $\xi = t - c$ en la integral.

c) Determinar qué función tiene transf. de Laplace $\frac{e^{-s}}{s^2}$.

d) Determinar qué función tiene transf. de Laplace $\frac{e^{-3s}}{s^2-2s-3}$. Ayuda: probar que $\mathcal{L}\{\frac{1}{2}\sinh 2t\} = \frac{1}{s^2-2^2}$.