ANALISIS MATEMATICO IV- Práctico 4
Series de Fourier - Aplicaciones

1. Para cada una de las siguientes funciones considerar su extensión periódica fuera de su intervalo de definición, a todo $\mathbb{R}$. Calcular la serie de Fourier de la extensión y graficar aproximadamente la función a la cual la serie obtenida converge.

   a) $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

   c) $f(x) = 1 - x^2$, $-1 \leq x \leq 1$, d) $f(x) = x$, $-1 \leq x < 1$,

   e) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} L + x, & -L \leq x < 0 \\ L - x, & 0 \leq x < L \end{cases}$

2. Hallar la solución del siguiente problema de valores iniciales,

$$y'' + \omega^2 y = \operatorname{sen}(nt), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

   donde n es un entero positivo y $\omega^2 \neq n^2$. Analizar qué ocurre si $\omega^2 = n^2$.

3. Resolver el siguiente problema de valores iniciales,

$$y'' + \omega^2 y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nt), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

   donde $\omega > 0$ y ω no es un entero. Analizar cómo se altera el resultado si $\omega = m$ es un entero positivo.

4. Hallar una solución formal del siguiente problema de valores iniciales,

$$y'' + \omega^2 y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

   donde $f(t)$ es 2π-periódica y $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi, \\ 0, & t = 0, \pi, 2\pi. \\ -1, & \pi < t < 2\pi \end{cases}$.
   Ayuda: calcular la serie de Fourier de f.

5. Hallar la solución del siguiente problema,

$$y'' + \omega^2 y = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

   donde $f(t)$ es 2-periódica y $f(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \leq t < 1, \\ -1 + t, & 1 \leq t < 2. \end{cases}$