ANALISIS MATEMATICO IV- Continuación del Práctico 4
Transformada de Fourier

1. Calcular la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

   a) Si $a > 0$, $f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, b) $f(x) = e^{-a|x|}, a > 0,$

   d) $f(x) = \mathcal{X}_{[-a,a]}$, $a > 0$, e) $f(x) = \mathcal{X}_{[a,b]}$, $a < b$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 con $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|dx < +\infty$. Suponiendo que $f(x) \to 0$ para $|x| \to \infty$, probar que

$$\widehat{f'}(\omega) = i\omega \widehat{f}(\omega)$$

3. Calcular $\widehat{f}(\omega)$, donde $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$.
   Ayuda: probar que $\widehat{f}$ satisface la ecuación $y'(\omega) + \frac{\omega}{2a} y(\omega) = 0$ y usar que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

4. Calcular las integrales siguientes:

   a) $\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2} \sin(bx)dx$, b) $\int_0^{+\infty} e^{-a|x|} \cos(bx)dx$, donde $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.