ANALISIS MATEMATICO IV- Práctico 5
Funciones analíticas, ecuaciones de Cauchy-Riemann, funciones armónicas, Teorema de Cauchy

1. Dar el dominio de definición de cada una de las siguientes funciones complejas y dibujarlo.
a) $f(z) = \dfrac{\bar{z}-1}{z^2+i}$, b) $f(z) = \dfrac{1}{1-|z|^2}$, c) $f(z) = \dfrac{z}{z+\bar{z}}$, d) $f(z) = \dfrac{z}{1+z^3}$.

2. Expresar las siguientes funciones en la forma $u(x,y) + iv(x,y)$.
a) $f(z) = z^3 + z - 1$, b) $f(z) = \dfrac{\bar{z}-1}{z^2+1}$.

3. a) Demostrar, usando la definición de límite, que $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}^2}{z} = 0$.
b) Determinar si existe $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}}{z}$.

4. Hallar los siguientes límites.
a) $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{iz^3-1}{z+i}$, b) $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{4z^2}{(z-1)^2}$, c) $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z^2+1}{z+1}$, d) $\lim\limits_{z\to 1-i} (z + 2i\mathrm{R}e(z))$.

5. Para cada una de las siguientes funciones usar la definición de derivada para determinar en qué puntos z existe $f'(z)$. En caso que $f'(z)$ exista, calcular su valor.
a) $f(z) = \mathrm{I}m(z)$, b) $f(z) = |z|^2$,
c) $f(z) = \overline{z}$, d) $f(z) = \mathrm{R}e(z)$.

6. Para cada una de las siguientes funciones complejas usar las ecuaciones de Cauchy-Riemann para determinar si existe f'. En caso que exista la derivada, calcularla.
a) $f(z) = iz + 2$, b) $f(x+iy) = \cos x.\cosh y + i \sin x.\sinh y$,
c) $f(x+iy) = e^{-x}e^{-iy}$, d) $f(x+iy) = \cos x.\cosh y - i\sin x.\sinh y$,
e) $f(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$.

7. Sea f una función analítica en un subconjunto abierto y conexo $D \subseteq \mathbb{C}$. Probar que
a) Si $f'(z) = 0$, para todo $z \in D$ entonces f es constante.
b) Si $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in D$ entonces f es constante.
c) Si $\mathrm{R}e(f(z)) = 0$ para todo $z \in D$ entonces f es constante.

8. Probar que las siguientes funciones $u(x,y)$ son armónicas en todo el plano complejo y hallar una conjugada armónica $v(x,y)$.
a) $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$, b) $u(x,y) = 2x(1-y)$, c) $u(x,y) = \cosh x.\cos y$.

9. Sea $e^z = \exp(z) = e^{(x+iy)} = e^x.e^{iy}$. Probar que $\exp(z) = e^z$ es analítica en todo el plano complejo. Probar además que se cumplen las siguientes igualdades:
a) $\exp(\frac{2+\pi i}{4}) = \sqrt{\frac{e}{2}}\,(1+i)$, b) $\exp(z+\pi i) = -\exp z$, c) $\overline{(e^z)} = e^{\overline{z}}$.

10. Hallar los valores de z que cumplen a) $e^z = -2$, b) $e^{2z-1} = 1$, c) $|e^{-2z}| < 1$,
d) $\mathrm{Im}(e^z) = 0$, e) $\mathrm{Re}(e^z) = 0$, f) $arg(e^z) = \pi/4$.

11. Probar que $f(z) = \exp(\overline{z})$ no es analítica en ningún punto.

12. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que
    a) $e^{i\overline{z}} = \overline{e^{iz}}$, b) $e^z \in \mathbb{R}$, c) $e^z \in i\mathbb{R}$.

13. Describir el comportamiento de
    a) e^{x+iy} cuando $x \to \infty$,
    b) e^{2+iy} cuando $y \to \infty$.

14. Decidir si existe $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$.

15. *Ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares.* Sea $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ definida en un subconjunto abierto $A \subseteq \mathbb{C}$. Suponiendo que A no contiene a la semirecta $\{x+iy : y = 0, x \geq 0\}$, introducir coordenadas polares en A de modo que todo $z = x+iy \in A$ se escriba $z = re^{i\theta}$, o sea $x = r.\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, con únicos $r > 0$, y $0 < \theta < 2\pi$.
    Sean
    $$\tilde{u}(\theta, r) = u(r\cos\theta, r\sin\theta), \quad \tilde{v}(\theta, r) = v(r\cos\theta, r\sin\theta)$$
    Probar que f es analítica en A si y sólo si $\tilde{u}, \tilde{v}$ satisfacen
    $$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta},$$
    para todo $(\theta, r) \in (0, 2\pi) \times (0, +\infty)$ tal que $re^{i\theta} \in A$. Ayuda: usar la regla de la cadena.

16. Suponer que $f(z)$ es analítica en un punto $z_0 = z(t_0)$ de un arco diferenciable $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$. Probar que si $w(t) = f(z(t))$ entonces en $t = t_0$ se cumple que
    $$w'(t) = f'(z(t))z'(t).$$

17. Calcular $\int_C \cos z\, dz$ donde C es la poligonal obtenida conectando en ese orden los puntos $z_1 = \frac{\pi}{2}$, $z_2 = \frac{\pi}{2} + i$, $z_3 = -\frac{\pi}{2} + i$, $z_4 = -\frac{\pi}{2}$.

18. Calcular $\int_C \overline{z}\, dz$, donde C es el círculo de radio 1 centrado en 0 orientado positivamente.

19. Probar que
    $$\int_{C_0} (z - z_0)^{n-1} dz = 0, \quad (n \neq 0)$$
    cuando C_0 es cualquier contorno cerrado que no pasa por el punto z_0.

20. Sea $p(z)$ un polinomio de grado n y sea $R > 0$ suficientemente grande para que p no se anule en $\{z \in \mathbb{C}; |z| \geq R\}$. Sea γ el círculo de radio R y centro 0 orientado positivamente. Muestre que $\displaystyle\int_\gamma \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 2\pi i n$. *Ayuda:* expresar $p(z)$ como producto de factores lineales.

21. En cada caso hallar el dominio de analiticidad de la función f, y aplicar el teorema de Cauchy-Goursat para probar que $\int_C f(z)\,dz = 0$ cuando el contorno simple cerrado C es el círculo $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

   a) $f(z) = \tfrac{1}{\ }$, b) $f(z) = \dfrac{1}{\cosh z}$, c) $f(z) = \dfrac{z^2}{z-3}$

22. Sean C y C_0 dos contornos simples cerrados, orientados positivamente, siendo C_0 interior a C. Demostrar que si f es analítica en la región comprendida entre C y C_0, entonces
$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_0} f(z)\,dz$$

23. Teniendo en cuenta el valor de la integral de $(z-z_0)^{n-1}$, n entero, sobre un círculo $|z-z_0| = R$ tomado en sentido positivo, calcular la integral $\int_C (z-2-i)^{n-1}\,dz$ cuando C es la frontera del rectángulo $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 2$, tomada en sentido positivo, y n es un número entero. Observar que el caso $n = 0$ es especial.

24. Calcular cada una de las siguientes integrales en las que el camino de integración es una curva arbitraria uniendo los límites de integración,
   a) $\displaystyle\int_1^3 (z-2)^3\,dz$, b) $\displaystyle\int_0^{\pi+2i} \cos(z/2)dz$, c) $\displaystyle\int_i^{i/2} e^{\pi z}dz$.

25. Use la fórmula de Cauchy para calcular las siguientes integrales, donde C es la curva $\{Re^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi\} \cup [-R, R]\}$ orientada positivamente y $R > \max\{b, 1\}$.
   a) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^2+z+1}$, b) $\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\,dz$, $0 < a < b$

26. Suponga que f es entera y que $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(z))$ está acotada superiormente. Mostrar que f es constante. Ayuda: componer con la función e^z.

27. Denotemos por C la frontera del cuadrado cuyos lados están sobre las rectas $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$, donde C se recorre en sentido positivo. Calcular las siguientes integrales usando la fórmula integral de Cauchy para una función o sus derivadas.
   a) $\displaystyle\int_C \frac{e^{-z}dz}{z - \frac{i\pi}{2}}$, b) $\displaystyle\int_C \frac{z\,dz}{2z+1}$, c) $\displaystyle\int_C \frac{\cosh z}{z^4}\,dz$.