ANALISIS MATEMATICO IV- Práctico 7
Transformaciones conformes. Aplicaciones

1. Hallar la imagen por $f(z) = \dfrac{1}{z}$ de los siguientes conjuntos:
a) Un círculo de radio $r > 0$ centrado en 0.
b) Un círculo de radio $|a|$ centrado en $a \in \mathbb{R}$.
c) Una recta horizontal $Im(z) = c_2$ y de una recta vertical $Re(z) = c_1$.
d) El sector $\{z \mid \alpha \leq \arg z \leq \beta\}$.
e) El semiplano $Im(z) > c$. Distinguir los casos $c > 0$ y $c \leq 0$.
f) La intersección de los discos $|z - 1| < 1$ y $|z + i| < 1$.
g) Una recta ℓ parametrizada por $t \mapsto z_0 + tz$, $t \in \mathbb{R}$, donde $z_0, z \in \mathbb{C}$ satisfacen $Re(z_0\bar{z}) = 0$.
h) Un círculo de radio $R > 0$ centrado en $0 \neq z_0 \in \mathbb{C}$.
i) Un semiplano determinado por una recta ℓ.

2. Graficar la imagen por $\exp(z)$ de los siguientes conjuntos:
a) $\mathrm{Re}(z) = a$, con a constante.
b) $a \leq \mathrm{Re}(z) \leq b$, con a, b constantes.
c) $\mathrm{Im}(z) = c$, con c constante.
d) $c \leq \mathrm{Im}(z) \leq d$, con c, d constantes.
e) $R = \{z \mid A \leq \mathrm{Re}(z) \leq B,\ C \leq \mathrm{Im}(z) \leq D\}$.
f) La recta $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$.
g) La región R dada por $x \geq 0$, $0 \leq y \leq \pi$.

3. Determinar la imagen por la función $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$, de los siguientes conjuntos:
i) Un círculo de radio r centrado en $z = 0$.
ii) El semianillo circular $\{z = re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi,\ 1 \leq r \leq b\}$, con $b \geq 1$.
iii) Determinar además la preimagen por f del semiplano $\{w : \mathrm{Im}\, w \geq 0\}$.

4. Probar que la rama principal del logaritmo $w = Log(z)$ es una función biyectiva del semiplano $Re(z) > 0$ sobre la banda $-\frac{\pi}{2} < Im(w) < \frac{\pi}{2}$ y del semiplano $Im(z) > 0$ sobre la banda $0 < Im(w) < \pi$.

5. Obtener *algunas* de las siguientes fórmulas:
a) $\mathrm{arcsen} z = -i \log(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$.
b) $\arccos z = -i \log(z \pm \sqrt{z}^2 - 1)$.
c) $\arctan z = \dfrac{1}{2i} \log\left(\dfrac{1 + iz}{1 - iz}\right)$.

6. Sea $f(z) = \text{sen } z$, y B la franja semi-infinita $\{x + iy \mid -\pi/2 \leq x \leq \pi/2,\ y \geq 0\}$.
a) Mostrar que el borde de B se mapea inyectivamente sobre el eje real. ¿Es f es conforme sobre el borde de B?
b) Calcular y graficar las imágenes de una semirrecta vertical $x = c$, $y \geq 0$, interior a la franaja.
c) Mostrar que B se mapea inyectivamente sobre el semiplano superior cerrado.
d) ¿Cuál es la imagen de la región rectangular $-\pi \leq x \leq \pi$, $0 \leq a \leq y \leq b$ contenida en el semiplano superior?

7. Determinar qué región del plano complejo se mapea inyectivamente sobre el semiplano superior $\{z : Im(z) > 0\}$ por las siguientes aplicaciones:
a) $\cos z$, b) senh z

8. a) Hallar la imagen de la región $0 < Re(z) < 1$ por la transformación $S : z \mapsto iz$.
b) Probar que la transformación $w = T(z) = iz + i$ aplica el semiplano $x > 0$ sobre el semiplano $Im(w) > 1$.
c) Hallar la imagen del semiplano $y > 1$ por la transformación $U : z \mapsto (1 - i)z$.

9. Hallar la transformación fraccionaria o de Moebius que lleva los puntos $1, i$ y $-i$ respectivamente en $-1, i$ y $-i$. En qué región se transforma el interior del circulo unidad?

10. Escribir la transformacion fraccionaria $T(z) = \dfrac{i - z}{i + z}$ como composición de traslaciones, rotaciones, dilataciones e inversiones. Usar esto para encontrar la imagen del semiplano $y > 0$.

11. Hallar una transformación fraccionaria o de Moebius que aplique $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z < 0\}$ sobre el círculo unidad (abierto).

12. Hallar la imagen de la semi-banda $\{x+iy : x > 0,\ |y| < \pi\}$ por la función $f(z) = \dfrac{e^z + 1}{e^z - 1}$.

13. Hallar la temperatura estacionaria acotada $T(x, y)$ de una placa $P : x \geq 0, y \geq 0$ muy delgada cuyas caras estan aisladas termicamente y cuyos bordes estan a temperatura $T(x, 0) = 0$, para $x > 0$, y $T(0, y) = 1$, para $y > 0$. Hallar las isotermas y líneas de flujo y dibujar algunas. Ayuda: aplicar la transformación $w = Log(z)$.

14. Hallar la Hallar la temperatura estacionaria $T(x, y)$ de una placa delgada homogénea $\{re^{i\theta} : 0 \leq r \leq R\}$, $0 \leq \theta \leq \theta_0$, cuyas caras estan aisladas termicamente, al igual que el borde $r = R$ y cuyos bordes laterales $\theta = \theta_0$, $\theta = 0$ se encuentran a temperaturas $T = T_0$ y $T = 0$, respectivamente.

15. Resolver el siguiente problema de Dirichlet en una franja semi-infinita:
hallar una función $U(x, y)$ en $F = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y\}$ que satisfaga

$$\begin{array}{ll} U_{xx} + U_{yy} = 0, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, y > 0, \\ U(x, 0) = 0, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ U(0, y) = 1, & y > 0, \\ U(\frac{\pi}{2}, y) = 0, & y > 0. \\ 0 \leq U(x, y) \leq 1. & \end{array}$$

Ayuda: este problema se puede transformar en el del ejercicio 13.

16. Hallar el potencial electrostático V en el espacio entre el medio-cilindro $\{x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ y el plano $y = 0$, si $V = 0$ sobre la superficie cilindrica y $V = 1$ sobre el plano $y = 0$. Ayuda: analizar la transformación $w = i(\frac{1-z}{1+z})$.