ANALISIS MATEMATICO IV- Práctico 6
Series de Taylor y Laurent. Singularidades. Residuos. Evaluación de Integrales por residuos.

1. Hallar el desarrollo en serie de Taylor de las siguientes funciones en los puntos indicados, y determine el radio de convergencia de la serie.

   a) $\dfrac{1}{z^2}$ en $z_0 = -1$, b) $f(z) = e^z$, en $z_0 = 0$

   c) $f(z) = \sqrt{z}$ en $z_0 = -1$ d) $f(z) = \log z$ en $z_0 = i$

2. Hallar la serie de Taylor o de Laurent de las siguientes funciones en el punto indicado. Indicar además la región de convergencia.

   a) $\dfrac{1}{4-3z}$, $a = 0$, b) $\dfrac{1}{2z-i}$, $a = -1$,

   c) $\dfrac{\cos(z^2)}{z^4}$, $a = 0$, d) e^{z^2-z}, $a = 0$.

3. Encontrar el dominio de analiticidad de la función

$$f(z) = 1 + \frac{z}{1+z} + (\frac{z}{1+z})^2 + (\frac{z}{1+z})^3 + \ldots$$

   ¿Cuál es el valor de $f(z)$ en ese dominio?

4. Derivar o integrar término a término una serie conocida para obtener los desarrollos en serie de las siguientes funciones en $z_0 = 0$:

   a) $\dfrac{1}{(1-z)^2}$, b) $-z\cos(z) + \operatorname{sen}(z)$, c) $2ze^{z^2-1}$, d) $(z+1)^{3/2}$.

5. Integrar la serie de Maclaurin para $1/(1+s)$ a lo largo de un contorno interior al círculo de convergencia, de $s = 0$ a $s = z$, para obtener la representación siguiente:

$$\operatorname{Log}(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

6. a) Desarrollar senh(z) en potencias de $z - \pi i$ para probar que

$$\lim_{z\to\pi i} \frac{\mathrm{senh}(z)}{z - \pi i} = -1$$

b) Probar que si $f(z) = z^{-1}\mathrm{Log}(z+1)$ cuando $z \neq 0$ y $f(0) = 1$, entoces f es analítica en el dominio $\{|z| < 1\}$.

7. Dar los desarrollos en serie de Laurent de cada una de las siguientes funciones en los anillos que se indican:

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{z}{(z-1)(z-2)} \text{ en } \begin{cases} |z| < 1 \\ 0 < |z-2| < 1. \end{cases} \\ f(z) &= \frac{1}{z^2(1-z)} \text{ en } \begin{cases} 0 < |z| < 1 \\ 1 < |z| < \infty. \end{cases} \\ g(z) &= \frac{1}{z(1+z^2)} \text{ en } \begin{cases} 0 < |z-i| < 1 \\ 1 < |z-i| < 2 \\ 2 < |z-i| < \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

8. Encontrar los desarrollos de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1}{(2z+1)(z-1)}$$

válidos en la corona $1/2 < |z| < 1$, y en el anillo $0 < |z + 1/2| < 3/2$. ¿En dónde son válidos simultáneamente ambos desarrollos?

9. Encontrar las singularidades de cada una de las siguientes funciones y clasificarlas según sean polos o singularidades esenciales y hallar las partes principales correspondientes.

$$f(z) = \frac{\mathrm{sen} z}{z^2(z-\pi)}, \quad h(z) = \frac{\mathrm{sen}(z)}{z^2}, \quad g(z) = z\exp(\frac{1}{z}), \quad r(z) = \frac{z^2}{1+z}.$$

10. Verificar que las singularidades de las siguientes funciones son polos. Determinar su orden y los correspondientes residuos.

$$\text{a) } f(z) = \frac{1-\cosh z}{z^3}, \qquad \text{b) } f(z) = \tanh z, \qquad \text{c) } f(z) = \frac{z}{\cos z}.$$

11. Si C es el círculo unitario recorrido en sentido positivo, evaluar las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{\operatorname{sen} z}$, b) $\displaystyle\int_C \frac{e^{1/z}\,dz}{z}$, c) $\displaystyle\int_C \frac{e^{-z}}{z(z+2)}dz$.

12. Calcular la integral

$$\int_C \frac{3z^2+2}{(z-1)(z^2+9)}\,dz,$$

en los siguientes casos:
i) C es el círculo $|z-2|=2$,
ii) C es el círculo $|z|=4$, ambos recorridos en sentido antihorario.

13. Obtener las siguientes identidades.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}$,

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$,

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}$,

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{(a^2-b^2)}\Big(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\Big)$, $(a>b>0)$,

(e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\operatorname{sen}\theta} = \frac{2\pi}{3}$,

(f) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$, $-1<a<1$.

(g) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\operatorname{sen}\theta)^{2n} d\theta = \frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n}(n!)^2}$.

(h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x\,dx}{1+x^2} = 0$.

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x\,dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{\pi}{4}$,

(j) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(a\pi)}$, $0<a<1$.

14. Probar el siguiente Lema de Jordan:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta} d\theta < \frac{\pi}{2R}$$

Ayuda: observar que $\sin\theta \geq \dfrac{2\theta}{\pi}$, con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

15. Integrando e^{iz^2} sobre el borde del sector $re^{i\theta} : 0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, usar Lema de Jordan para probar que la integral sobre el arco tiende a cero para $R \to +\infty$. Usar además el hecho que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, para calcular el valor de las siguientes integrales de Fresnel:

    a) $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx$, b) $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$.

16. Mostrar que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

17. Calcular las siguientes integrales

    a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2} dx$,

    b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$,

    c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

    d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.