Práctico 1

1. Demostrar las siguientes afirmaciones. Justificar todos los pasos, indicando las propiedades usadas.
(a) Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$.
(b) Si $ax = a$ para algún número $a \neq 0$, entonces $x = 1$.
(c) $a(b - c) = ab - ac$.
(d) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.
(e) Si $x^2 = y^2$, entonces $x = y$ ó $x = -y$.
(f) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, si $a, b \neq 0$.

2. Sean a, b, c números reales. Demostrar las siguientes afirmaciones:
(a) Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
(b) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
(c) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.
(d) Si $a > 1$, entonces $a < a^2$. Si $0 < a < 1$, entonces $a^2 < a$.
(e) $ab > 0 \iff (a > 0 \text{ y } b > 0)$ ó $(a < 0 \text{ y } b < 0)$.
(f) Si $a^2 < b^2$ y $a > 0$, entonces $b > a$ ó $b < -a$.

3. Encontrar todos los números reales x que satisfacen las siguientes desigualdades y graficar el resultado en la recta real.

(a) $4 - x < 3 - 3x$. (b) $5 - x^2 < 8$. (c) $x^2 > 9$.
(d) $(x - 1)(x - 3) > 0$. (e) $x^2 - x + 10 > 16$. (f) $x + 1 > x$.
(g) $x - 1 > x$. (h) $-3/x > 1$. (i) $(x - 1)/(x + 1) > 0$.

4. El área de un rectángulo es $4\,\mathrm{m}^2$. Determinar las dimensiones del rectángulo, sabiendo que si a la longitud de la base la incrementamos en una unidad y a la altura la disminuimos en dos unidades, entonces el área del nuevo rectángulo sigue siendo $4\,\mathrm{m}^2$.

5. b Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta.
(a) Si $a^2 = 1$, entonces $a = 1$ o $a = -1$.
(b) Si $a^2 = b^2$, entonces $a^3 = b^3$.
(c) Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a - c < b - d$.
(d) Si $a < b$ y c no es negativo, entonces $ac < bc$.
(e) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid x + y < 0$.
(f) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid xy > 0$.

6. ¿Dónde está el error de la siguiente "demostración"?
Supongamos $x = y$. Entonces

$$\begin{aligned} x^2 &= xy, \\ x^2 - y^2 &= xy - y^2, \\ (x + y)(x - y) &= y(x - y), \\ x + y &= y, \\ 2y &= y, \\ 2 &= 1. \end{aligned}$$

7. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. Probar que $\sqrt{ab} \leq (a + b)/2$. ¿Cuándo vale la igualdad?
Nota: El número $\sqrt{ab}$ se denomina la *media geométrica* entre a y b, mientras que $(a + b)/2$ se denomina la *media aritmética o promedio* entre a y b.

8. Probar que si $a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$, entonces $ax^2 + bx + c > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

9. (a) Probar que si $a^3 = 1$, entonces $a = 1$.
(b) Usar el inciso anterior para deducir que si $a^3 = b^3$, entonces $a = b$.

10. Expresar lo siguiente prescindiendo de las barras de valor absoluto, tratando por separado distintos casos cuando sea necesario.
(a) $|(|x| - 1)|$.
(b) $a - |(a - |a|)|$.

11. Demostrar las siguientes afirmaciones:
(a) $|x| = |-x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(b) $|xy| = |x||y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
(c) $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

12. Resolver las siguientes desigualdades, interpretarlas en términos de distancias, y graficar el conjunto de soluciones.

(a) $|x - 3| < 8$. (b) $|x - 3| \geq 8$. (c) $|x - 3| < 0$. (d) $|2x - 3| > 1$.

13. Resolver las siguientes ecuaciones.

(a) $|x - 3| = c \quad (c \in \mathbb{R})$. (b) $|x - 1||x + 2| = 3$. (c) $|x - 1| + |x + 2| = 3$.

14. Probar los siguientes ítems para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) $|x - y| \leq |x| + |y|$. (b) $|x - y| \geq |x| - |y|$. (c) $|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$.

15. Decir cuáles de los siguientes subconjuntos de números reales tiene supremo, ínfimo, máximo o mínimo.

(a) $[3, 8)$. (b) $(-\infty, \pi)$. (c) $\{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
(d) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z},\, n \neq 0\}$. (e) $\{3 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. (f) $\{x \in \mathbb{Q} \mid -\frac{3}{4} \leq x \leq 0\}$.
(g) $\{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < \sqrt{2}\}$. (h) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < \sqrt{2}\}$. (i) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$.

16. Probar que si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente, entonces $A \cup B$ es acotado superiormente.

17. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que $x \leq y$ para todo $x \in A$, $y \in B$. Demostrar que:
(a) $\sup A \leq y$ para todo $y \in B$.
(b) $\sup A \leq \inf B$.

18. Determinar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son densos.

(a) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. (b) $\mathbb{R} \setminus (0, 10^{-5})$. (c) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

19. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta.
(a) Si $\sup A \leq \inf B$, entonces $A \cap B = \emptyset$.
(b) $\max\{x, -x\} = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(c) Un conjunto formado por todos los números reales salvo un número finito de ellos es denso.