# Práctico 4

**1.** En cada uno de los siguientes casos para un $\varepsilon >$ dado, encontrar $\delta > 0$ tal que, $|f(x) - l| < \varepsilon$ para todo $x$ que satisface $0 < |x - a| < \delta$.

(a) $\begin{cases} f(x) = x^4 \\ l = a^4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} \\ a = 1,\ l = 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} f(x) = x^4 + \dfrac{1}{x} \\ a = 1,\ l = 2 \end{cases}$

**2.** (a) Trazar el gráfico de la siguiente función:

$$g(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < -1, \\ x + 2 & \text{si } -1 \leq x < 1, \\ 4 & \text{si } x = 1, \\ 4 - x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

(b) Con el gráfico de la parte (a), determinar el valor de los siguientes límites cuando existan.

(i) $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)$ (iii) $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$ (iv) $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$

(v) $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ (vi) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ (vii) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$ (viii) $\lim\limits_{x\to \infty} g(x)$

**3.** Demostrar por definición los siguientes límites.

(a) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}, \quad a > 0$ (b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

**4.** Calcular los siguientes límites en caso de existir. Justificar.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ (c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$

(d) $\lim\limits_{x\to y} \dfrac{x^n - y^n}{x - y}$ (e) $\lim\limits_{h\to 0} \left( \dfrac{1}{h\sqrt{1+h}} - \dfrac{1}{h} \right)$ (f) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \quad (a > 0)$

(g) $\lim\limits_{t\to 9} \dfrac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$ (h) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 - [x])$ (i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x \cos x}$

**5.** Sean $f$ y $g$ dos funciones para las cuales existen $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$.

(a) Demostrar que si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x$, entonces $l_1 \leq l_2$.

(b) Si $f(x) < g(x)$ para todo $x$, ¿implica esto que $l_1 < l_2$?

**6.** Supongamos que $f$, $g$ y $h$ satisfacen $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x$ y que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l = \lim\limits_{x\to a} h(x)$. Demostrar que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.

**7.** Demostrar por definición los siguientes límites.

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{(x - 3)^2} = \infty$ (b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x + 2}{3x - 2} = \dfrac{1}{3}$ (c) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-x^3 + 10) = \infty$

**8.** Calcular los siguientes límites en caso de existir. Justificar.

(a) $\lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{3y-4}{6y+1}$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^3-2x+7}{4x^2-1}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

**9.** Demostrar las siguientes afirmaciones.

(a) Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x^3)$.

(b) Si $\lim_{x\to 0} f(x^2)$ existe, entonces no necesariamente existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(c) Si $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(|x|)$.

(d) Si $\lim\limits_{x\to 0^+} f(1/x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to 0^+} f(1/x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

(e) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to\infty} f(1/x) = \infty$.

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{sen}(\frac{1}{x})$ no existe.

(g) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, entonces $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |\lim\limits_{x\to a} f(x)| = |l|$.

**10.** Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \text{ es racional,} \\ x, & \text{si } x \text{ es irracional,} \end{cases}$ demostrar que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

**11.** Calcular los siguientes límites. Recordar que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sen}(x)}{x} = 1$.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\mathrm{sen}(3x)}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sen}^2(2x)}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos(x)}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x}$ (e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\mathrm{sen}(x^2-1)}{x-1}$

**12.** Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justificar. Asumir que las funciones $f$ y $g$ están definidas en un entorno de $a$ o de 0 según corresponda.

(a) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ existen, entonces $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe.

(b) Si no existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces no existe $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$.

(c) Si $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} g(x)\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x}) = 0$.

(d) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$ para toda función $g$.

(e) Si $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.