

## PRÁCTICA 4

### GENERACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS.

**Ejercicio 1.** Se baraja un conjunto de  $n = 100$  cartas (numeradas consecutivamente del 1 al 100) y se extrae del mazo una carta por vez. Consideramos que ocurre un “éxito” si la  $i$ -ésima carta extraída es aquella cuyo número es  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

- a) Escribir un programa de simulación para estimar la esperanza y la varianza del número total de éxitos.
- b) Determine las respuestas exactas para  $n \gg 1$  y compárelas con los resultados estimados.

**Ejercicio 2.** Se desea construir una aproximación de:

$$\sum_{k=1}^N \exp\left(\frac{k}{N}\right) \text{ donde } N = 10000 .$$

- a) Escribir un algoritmo para estimar la cantidad deseada.
- b) Obtener la aproximación sorteando 100 números aleatorios.
- c) ¿Es buena la aproximación obtenida?

**Ejercicio 3.** Se lanzan simultáneamente un par de dados legales y se anota el resultado de la suma de ambos. El proceso se repite hasta que todos los resultados posibles:  $2, 3, \dots, 12$  hayan aparecido al menos una vez. Estudiar mediante una simulación el número de lanzamientos necesarios para cumplir el proceso. Cada lanzamiento implica arrojar *el par* de dados.

- a) Describir la estructura lógica del algoritmo que permite simular en computadora el número de lanzamientos necesarios para cumplir el proceso.
- b) Mediante una implementación en computadora, calcular el valor medio y la desviación estándar del número de lanzamientos, repitiendo el algoritmo: 100, 1000, 10000 y 100000 veces.

**Ejercicio 4.** Desarrollar dos métodos para generar una variable aleatoria  $X$  cuya distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X = i) = \frac{\frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}}{\sum_{j=0}^k \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}} \quad (i = 0, \dots, k)$$

**Ejercicio 5.** Desarrollar un método para generar una variable aleatoria  $X$  cuya distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X = j) = \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{j-1}}}{3^j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

**Ejercicio 6.** Sea  $X$  una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es  $P(X = j) = p_j$  con  $j = 1, 2, \dots$ . Sea:

$$\lambda_n = P(X = n | X > n - 1) = \frac{p_n}{1 - \sum_{j=1}^{n-1} p_j}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Las cantidades  $\lambda_n$ , son las tasas discretas de riesgo. Considerando a  $X$  como el tiempo (discreto) de vida de algún artículo,  $\lambda_n$  representa la probabilidad de que habiendo sobrevivido hasta el tiempo  $n - 1$ , muera en el tiempo  $n$ .

a) Mostrar que  $p_1 = \lambda_1$  y que

$$p_n = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \cdots (1 - \lambda_{n-1})\lambda_n$$

*Método de la tasa discreta de riesgo* para simular variables aleatorias discretas: Se genera una sucesión de números aleatorios que termina cuando el  $n$ -ésimo número generado es menor que  $\lambda_n$ . El algoritmo puede escribirse como sigue:

Paso 1:  $X = 1$

Paso 2: Generar  $U$

Paso 3: Si  $U < \lambda_X$ , terminar.

Paso 4:  $X = X + 1$

Paso 5: Ir al Paso 2

b) Mostrar que los valores de  $X$  que genera este proceso tienen la distribución de probabilidad deseada.

c) Suponer que  $X$  es una variable aleatoria geométrica con parámetro  $p$ :

$$P(X = n) = p(1 - p)^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Determinar los valores de  $\lambda_n, n \geq 1$ . Explique cómo funciona el algoritmo anterior en este caso y por qué es evidente su validez.

**Ejercicio 7.** Suponiendo que  $0 \leq \lambda_n \leq \lambda$ , para todo  $n \geq 1$ ; considerar el siguiente algoritmo para generar una variable aleatoria con tasas discretas de riesgo  $\{\lambda_n\}$ :

Paso 1:  $S = 0$

Paso 2: Generar  $U$ ,  $Y = \text{Ent} \left[ \frac{\log(U)}{\log(1 - \lambda)} \right] + 1$

Paso 3:  $S = S + Y$

Paso 4: Generar  $U$

Paso 5: Si  $U \leq \lambda_s/\lambda$ , tomar  $X = S$  y terminar. Caso Contrario, ir a Paso 2.

a) ¿Cuál es la distribución de  $Y$  en el paso 2?

b) Explique cómo funciona el algoritmo.

c) Argumentar que  $X$  resulta una variable aleatoria con tasas discretas de riesgo  $\{\lambda_n\}$ .