

PRÁCTICA 5

GENERACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS.

Ejercicio 1. Desarrollar un método para generar una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{2-x/3}{2} & \text{si } 3 \leq x \leq 6 \end{cases} .$$

Ejercicio 2. Desarrollar un método para generar una variable aleatoria con distribución de probabilidad

$$F(x) = 1 - \exp(-\alpha x^\beta) .$$

Una variable aleatoria con esta distribución se conoce como variable aleatoria de Weibull.

Ejercicio 3. Método de la composición: Suponer que es relativamente fácil generar n variables aleatorias a partir de sus distribuciones de probabilidad F_i , $i = 1, \dots, n$. Implementar un método para generar una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es

$$F(x) = \sum_{i=1}^n p_i F_i(x) .$$

donde p_i , $i = 1, \dots, n$, son números no negativos cuya suma es 1.

Ejercicio 4. Desarrollar un método para generar la variable aleatoria con función de distribución

$$F(x) = \int_0^\infty x^y e^{-y} dy, \quad 0 \leq x \leq 1 .$$

Pensar en el método de composición del ejercicio anterior. En particular, sea F la función de distribución de X y suponga que la distribución condicional de X dado $Y = y$ es

$$P(X \leq x | Y = y) = x^y, \quad 0 \leq x \leq 1 .$$

Ejercicio 5. Considere que es sencillo generar una variable aleatoria a partir de cualquiera de las distribuciones F_i , $i = 1, \dots, n$. Explicar cómo generar variables aleatorias a partir de las siguientes distribuciones:

a) $F(x) = \prod_{i=1}^n F_i(x)$

b) $F(x) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_i(x))$

Sugerencia: Si X_i , $i = 1, \dots, n$, son variables aleatorias independientes, donde X_i tiene distribución F_i , ¿cuál variable aleatoria tiene como distribución a F en cada caso?

Ejercicio 6. Utilizar el método del rechazo y los resultados del ejercicio anterior para desarrollar otros dos métodos, además del método de la transformada inversa, para generar una variable aleatoria con distribución de probabilidad

$$F(x) = x^n, \quad 0 \leq x \leq 1 .$$

Analizar la eficiencia de los tres métodos para generar la variable a partir de F .

Ejercicio 7. Desarrollar dos métodos para generar una variable aleatoria con densidad de probabilidad $f(x) = x e^{-x}$, $x \geq 0$.

Comparar sus eficiencias.

Ejercicio 8. Escribir dos programas para generar un variable aleatoria normal mediante

- a) la generación de variables exponenciales según el ejemplo 5f del libro *Simulación* de S. M. Ross,
- b) el método polar.

Probar los códigos calculando la media y varianza de 10000 valores generados con ambos métodos.

Ejercicio 9. Sea en par (X, Y) uniformemente distribuido en un círculo de radio 1. Mostrar que si R es la distancia del punto (X, Y) al centro del círculo, entonces R^2 está uniformemente distribuída en el intervalo $(0, 1)$.

Ejercicio 10. Escribir un programa para generar las primeras T unidades de tiempo de un proceso de Poisson con parámetro λ .

Ejercicio 11. Los autobuses que llevan los aficionados a un encuentro deportivo llegan a destino de acuerdo con un proceso de Poisson a razón de cinco por hora. La capacidad de los autobuses es una variable aleatoria que toma valores en el conjunto: $\{20, 21, \dots, 40\}$ con igual probabilidad. A su vez, las capacidades de dos autobuses distintos son variables independientes. Escribir un algoritmo para simular la llegada de aficionados al encuentro en el instante $t = 1$ hora.

Ejercicio 12.

- a) Escribir un programa que utilice el algoritmo del adelgazamiento para generar las primeras diez unidades de tiempo de un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad

$$\lambda(t) = 3 + \frac{4}{t+1}.$$

- b) Indicar una forma de mejorar el algoritmo de adelgazamiento para este ejemplo particular.