Presentación

FaMAF

12 de marzo, 2013

Bibliografía

1. Sheldon M. Ross, Modelos y Simulación, Prentice Hall, 2da. edición, (1999).
2. Sheldon M. Ross, Simulation, Academic Press, 4rd. edition, 2006.
3. Averill M. Law, W. David Kelton, Simulation Modelling and Analysis, Mc. Graw Hill, 3ra. edición, 2000
4. George Marsaglia and Arif Zaman, Some portable very-long-period random number generators, Computers in Physics,(8)1, 117 (1994).
5. Numerical Recipes
6. Numerical Recipes in C

Un ejemplo

Un farmacéutico planea instalar una farmacia en la que preparará pedidos de medicamentos en base a prescripciones que traen los clientes.

Planifica y espera:

- Abrir a las 9.00 AM.
- No recibir pedidos luego de las 5:00 PM.
- Permanecer en la farmacia hasta cumplir todos los pedidos.

Su experiencia le indica que:

- atenderá un promedio de 32 clientes por día.
- el tiempo de atención es una cantidad aleatoria con media de 10 min., y desviación estándar de 4 min.

Preguntas posibles

- ¿A qué hora promedio saldrá de su negocio por la tarde?
- ¿Qué porcentaje de días saldrá después de las 17 hs.?
- ¿Cuál es el tiempo promedio para completar un pedido, teniendo en cuenta que debe haber finalizado con todos los anteriores?
- ¿Qué porcentaje de pedidos cumplirá en un lapso de 30 min.?
- <u>Restricción</u>: No aceptar nuevos pedidos si hay 5 pedidos pendientes.
  ¿Cómo se responden las preguntas anteriores?

El modelo

Se elige un modelo probabilístico para describir:

- Horario de llegadas de los clientes.
- Tiempo de servicio para cumplir un pedido.

Hipótesis

- Tiempos de llegada
  - con tasa constante.
  - con tasa variable, esto es dependientes de la hora del día.
- Tiempo de servicio
  - con tasa constante.
  - con tasa variable, esto es dependiente de otras variables.

Respuestas:

- Analíticamente, es complicado darlas.
- SIMULACIÓN
  - Con números aleatorios simulamos valores de las variables del modelo un número grande de días
  - Por ejemplo, si en 1000 días simulados, 132 veces el farmacéutico se queda después de las 5hs, $P(\text{salir tarde}) \sim 0.132$

La Simulación

Implica:

- Conocer distribuciones teóricas de probabilidad.
- Reconocer v.a. dependientes e independientes.
- Saber generar (simular) valores de v.a. con diferentes distribuciones.
- Inferir distribuciones a partir de muestras de datos.
- Aplicar tests de hipótesis.
- Estimar y ajustar parámetros de distribuciones.
- Conocer técnicas de validación estadística.

Permite:

- Utilizar la computadora para representar al modelo.
- Responder preguntas en base al modelo simulado.
- Modificar condiciones y responder otras preguntas.

Otros ejemplos

- Sistema de cola de espera en un servidor.
- Sistema de cola de espera en dos o más servidores, en serie.
- Sistema de cola de espera en dos o más servidores, en paralelo.
- Modelo de inventario.
- Modelo de reparación de máquinas.

Ejemplo

Supongamos que tenemos una cola de espera de un solo servidor y que A_n, S_n, D_n son los tiempos de arribo, servicio y partida del cliente n, respectivamente. Entonces

$$D_n = S_n + max\{A_n, D_{n-1}\}$$

Cuál sería la relación si tuviera dos servidores en paralelo? Y en serie?

Repaso de probabilidades

- Espacio muestral. Eventos.
- Axiomas de probabilidad.
- Probabilidad condicional e independencia.
- Variables aleatorias.
- Valor esperado y varianza.
- Desigualdad de Chebyshev y las Leyes de los Grandes números.

Variables aleatorias

Discretas:

- Uniforme.
- Bernoulli.
- Binomial.
- Poisson.
- Geométrica.
- Binomial negativa o Pascal.
- Hipergeométrica.

Variables aleatorias

Continuas:

- Uniforme.
- Normal.
- Exponencial.
- Gamma.

Procesos de Poisson

- homogéneos.
- no homogéneos.

Esperanza condicional.
Varianza condicional.

Espacio muestral

Definición

Dado un experimento, se llama espacio muestral al conjunto de resultados del experimento.

Ejemplo En una carrera de 3 caballos, se considera el orden de llegada a la meta.

$$S = \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}.$$

Definición

Un evento es un subconjunto de S.

$$A = \{\text{resultados en los que el caballo 1 sale último}\}$$

$$A = \{(2,3,1),(3,2,1)\}.$$

Eventos

Son eventos:

- Uniones de eventos: $A \cup B$.
- Intersecciones de eventos: $A \cap B$.
- Complemento de un evento: A^c.

Esto implica que son eventos:

- $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.
- $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$.
- $S = A \cup A^c$.
- $\emptyset = A \cap A^c$.

A y B son mutuamente excluyentes si $A \cap B = \emptyset$.

Ejemplos

Ejemplo

S el espacio muestral de una carrera de tres caballos

$$A = \{\text{resultados que tienen a 1 como ganador}\}$$

$$B = \{\text{resultados que tienen a 2 como segundo}\}$$

- $A \cap B$
- $A \cup B$
- $A \cup B^c$
- Son mutuamente excluyentes?

Axiomas de probabilidad

Definición

P es una probabilidad sobre el espacio muestral S si:

Ax. 1 : $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo evento A.

Ax. 2 : $P(S) = 1$.

Ax. 3 : Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son mutuamente excluyentes 2 a 2:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Propiedades

- $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Axiomas de probabilidad

Ejemplo

Supongamos que cualquier resultado de la carrera es igualmente posible. Entonces

$$1 = P(1,2,3)+P(1,3,2)+P(2,1,3)+P(2,3,1)+P(3,1,2)+P(3,2,1)$$

$$= 6.P(1,2,3)$$

Por lo cual todos los puntos tienen probabilidad $1/6$.

Proposición

Si S es un espacio discreto, toda probabilidad P sobre S esta caracterizada por los valores en los puntos de S.

$$P(A) = \sum_{w_i \in A} P(w_i)$$

para todo evento A.

Probabilidad

Espacio de probabilidad=Espacio muestral + Probabilidad

Ejemplo

- Experimento 1: Tiro una moneda 3 veces.
- Experimento 2: Tiro una moneda hasta que salga cara.

- Experimento 1:

$$S = \{(ccc)(ccs)(csc)(scc)(sss)(ssc)(scs)(css)\}$$

$$P(w) = 1/2^3$$

- Experimento 2: Tiro una moneda hasta que salga cara.

$$S = \{c, sc, ssc, sssc, ssssc, \dots\}$$

$$P(w) = 1/2^{|w|}$$

Probabilidad condicional

Definición

Probabilidad condicional de que ocurra A dado B.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definición

A y B se dicen independientes si $P(A \mid B) = P(A)$.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Probabilidad condicional

Ejemplo

Supongamos que una urna tiene 4 bolas rojas numeradas del 1 al 4 y 3 bolas negras numeradas del 1 al 3. Si elegimos una bola al azar y es roja, cuál es la probabilidad de que tenga el número 1?

Tengo cuatro bolas rojas y una sola con el número 1, sería razonable que la probabilidad pedida sea 1/4. Porque?
$P(1|R) = P(1 \cap R)/P(R) = (1/7)/(4/7) = 1/4$

Ejemplo

Supongamos que una urna tiene 3 bolas rojas indistinguibles entre sí y una azul. Si elegimos dos bolas al azar en forma consecutiva sin reponerlas en la urna, cuál es la probabilidad de que ambas sean rojas?

$P(R_1 \cap R_2) = P(R_2|R_1)P(R_1) = 2/3.3/4 = 1/2$

Teorema de Bayes

Teorema

Si $A_1, \ldots, A_n$ es una partición de S, entonces

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

Ejemplo:

Un director de personal dispone de dos listas de solicitantes a empleo. La lista 1 incluye nombres de 3 hombres y 4 mujeres, mientras que la lista 2 incluye los nombres de 7 hombres y 3 mujeres. Se selecciona al azar un nombre de la lista 1 para pasar a la lista 2, y de la lista 2 (ya aumentada) se selecciona al azar otro nombre. Si el nombre elegido finalmente pertenece a un hombre, cual es la probabilidad de que el primer nombre elegido haya sido de una mujer?

Variables aleatorias

Definición

Una variable aleatoria sobre el espacio muestral S es una función: $X : S \mapsto \mathbb{R}$ tal que $P(X \leq x) = P(\{w : X(w) \leq x\})$ existe.

Definición

Función de distribución acumulada:

$$F(x) = P(X \leq x) := P\left(\{s \in S \mid X(s) \leq x\}\right).$$

- no decreciente.
- $0 \leq F(x) \leq 1$.
- continua a derecha

Variables aleatorias

- Discreta: sólo un número finito o numerable de valores.
- Continua: $P(X = x) = 0$, esto es F(x) es una función continua.
- (Absolutamente) Continua o continua con densidad: existe f no negativa tal que
$$P(X \in C) = \int_C f(x)\,dx.$$

Ejemplo

X el número de tiradas hasta que salgan tres caras consecutivas
Y el tiempo entre arribos de consumidores
Z el número de consultas al 112 en un día determinado.

Función de frecuencia o densidad discreta

X v.a. discreta, es decir, toma los valores $x_1, x_2, \ldots$:

- Función de frecuencia:

$$p(x_i) = P(X = x_i).$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1.}$$

$$P(X < b) = \lim_{n \to \infty} F(b - \frac{1}{n}).$$

Función de densidad

Sea X una variable continua que admite densidad f, entonces la función f cumple las siguientes propiedades

- $F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx.$
- $\frac{d}{da} F(a) = f(a).$
- $P(\{a - \epsilon/2 \leq X \leq a + \epsilon/2\} = \int_{a-\epsilon/2}^{a+\epsilon/2} f(x)\, dx \simeq f(a) \cdot \epsilon.$
- $P(X = a) = 0.$