Distribución para la suma de v. a. uniformes.

1 Introducción

Se trata de probar que si $U_1, U_2, \ldots, U_n$ son v.a. uniformemente distribuidas en el $(0,1)$, y N es la variable aleatoria dada por

$$N = \min\left\{n : \sum_{i=1}^{n} U_i > 1\right\},$$

entonces $E[N] = e$.

Para ver esto, notemos en primer lugar que N es una variable aleatoria discreta, que toma valores enteros no negativos. Más aún, $N \geq 2$, puesto que cada U_j es un número positivo menor que 1. Así, podemos escribir usando la definición de valor esperado, que

$$E[N] = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot P[N = n].$$

2 Cálculo de $P[N = n]$

Para calcular la probabilidad $P[N = n]$, notemos que $N = n$ si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{n} U_i > 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n-1} U_i \leq 1.$$

Para simplificar la notación, consideraremos

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i.$$

Ahora bien,

$$S_n > 1 \qquad \text{si y sólo si} \qquad S_{n-1} > 1 \ \text{ó}\ (S_{n-1} \leq 1 \ \text{y}\ S_n > 1),$$

siendo estas dos últimas posibilidades disjuntas. Por lo tanto,

$$P[S_n > 1] = P[S_{n-1} > 1] + P[N = n],$$

de donde obtenemos que

$$P[N = n] = P[S_n > 1] - P[S_{n-1} > 1].$$

Por lo que, será preciso calcular las densidades para S_n, con $n \geq 2$.

3 Cálculo de la densidad de S_n

Para este problema, es suficiente encontrar la densidad para S_n, para valores menores que 1.

Afirmación: Sea f_n la función de densidad de la variable aleatoria S_n, $n \geq 1$. Entonces

$$f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{para todo}\ \ 0 < x < 1.$$

Probamos esto por inducción.
Para $n = 1$, tenemos que $S_1 = U_1$, y sabemos que su densidad es $I_{(0,1)}(x)$, por lo que la afirmación es cierta en este caso.
Para $n = 2$, tenemos que $S_2 = U_1 + U_2$. Así, S_2 es una v.a. que toma valores en el intervalo $(0,2)$. Aunque como dijismos, sólo nos interesa conocer la densidad de S_2 para $0 < x < 1$. Sea f_{U_i} la densidad de la v.a. U_i, con $i = 1,2$. Tenemos que por la fórmula de convolución (ver ejemplo de la pag. 111 de las Notas de Probabilidad de Yohai),

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U_1}(t) f_{U_2}(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} I_{(0,1)}(t) I_{(0,1)}(x-t)dt = \int_0^x dt = x.$$

por lo que la afirmación es cierta también este caso.

Supongamos ahora que

$$f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

para un cierto n, y para todo $0 < x < 1$, y veamos que la afirmación se cumple para $n+1$.
Tenemos que $f_{n+1} = f_{S_n + U_{n+1}}$, y utilizando la fórmula de la densidad para suma de variables aleatorias, obtenemos

$$f_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) f_{U_{n+1}}(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) I_{(0,1)}(x-t)dt = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}dt = \frac{x^n}{n!}.$$

Por lo tanto, la afirmación es válida.

4 Cálculo de $E[N]$

Ahora podemos calcular $E[N]$. Tenemos que

$$P[S_n > 1] = 1 - P[S_n \leq 1] = 1 - \int_0^1 f_n(t)dt = 1 - \frac{1}{n!}.$$

Luego, usando la fórmula de la sección 2, tenemos que

$$P[N = n] = \left(1 - \frac{1}{n!}\right) - \left(1 - \frac{1}{(n-1)!}\right) = \frac{n-1}{n!}$$

y por lo tanto

$$E[N] = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$