Ejercicio 7c - Práctico 4.

1 Introducción

Nos proponemos resolver el siguiente problema:

Suponiendo que $0 \leq \lambda_n \leq \lambda$, para todo $n \geq 1$; considerar el siguiente algoritmo para generar una variable aleatoria con tasas dicretas de riesgo $\{\lambda_n\}$:

Paso 1: S = 0

Paso 2: Generar U, $\quad Y = \texttt{Ent}\left[\dfrac{\log(U)}{\log(1-\lambda)}\right] + 1$

Paso 3: S = S + Y

Paso 4: Generar U

Paso 5: Si U $\leq \lambda_s/\lambda$, tomar X = S y terminar. Caso Contrario, ir a Paso 2.

Probemos que X resulta una variable aleatoria con tasas discretas de riesgo $\{\lambda_n\}$.

2 Distribución de Y

Dado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$P[Y=n] = P\left[Ent\left(\frac{\ln U}{\ln(1-\lambda)}\right) + 1 = n\right] = P\left[Ent\left(\log_{1-\lambda} U\right) = n-1\right] = P[n-1 \leq \log_{1-\lambda} U < n] =$$

$$= P[(1-\lambda)^n \leq U < (1-\lambda)^{n-1}] = (1-\lambda)^{n-1} - (1-\lambda)^n = (1-\lambda)^{n-1}\lambda$$

y por lo tanto

$$Y \sim \mathcal{G}e(\lambda)$$

3 Armado del problema

Dada la v.a. I que cuenta la cantidad de interaciones realizadas hasta que finaliza el algoritmo; las v.a. $U_1, U_2, \ldots, U_I$ i.i.d. $\mathcal{U}(0,1)$; las v.a. $Y_1, Y_2, \ldots, Y_I$ i.i.d. $\mathcal{G}e(\lambda)$; las v.a. S_i, con $i \in \{1, 2, \ldots, I\}$, como el valor que toma S en la i-ésima iteración; y la v.a. X dada en el algoritmo, consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$A(k,n) = \{I = k, S_I = n\}$$

y

$$B(n) = \bigcup_{k=1}^{n} A(k,n).$$

Como $X = n$ si, y sólo si, el algoritmo para en $k \leq n$ iteraciones, $S_k = n$ y $U_k \leq \dfrac{\lambda_n}{\lambda}$, se tiene que

$$\{X = n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \left(A(k,n) \cap \left\{V_k \leq \frac{\lambda_n}{\lambda}\right\}\right).$$

Por la independencia existente entre las v.a. definidas, podemos decir que

$$P[X=n]=\sum_{k=1}^{n} P[A(k,n)]P\left[V_k\leq \frac{\lambda_n}{\lambda}\right]=\sum_{k=1}^{n} P[A(k,n)]\frac{\lambda_n}{\lambda}=\frac{\lambda_n}{\lambda}P[B(n)]. \tag{1}$$

4 Probabilidad de los $A(k,n)$

Debido a que $A(1,n)=\{Y_1=n\}$,

$$P[A(1,n)]=(1-\lambda)^{n-1}\lambda. \tag{2}$$

Dados $2\leq k\leq n$, se puede ver que

$$A(k,n)=\bigcup_{j=k-1}^{n-1}\left(A(k-1,j)\cap\left\{V_j>\frac{\lambda_j}{\lambda}\right\}\cap\{Y_k=n-j\}\right)$$

y por ende

$$P[A(k,n)]=\sum_{j=k-1}^{n-1}\left(P[A(k-1,j)]\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda}\right)(1-\lambda)^{n-j-1}\lambda\right) \tag{3}$$

Afirmación: Para cada $2\leq k\leq n$, y cada $n\geq 2$, se verifica

$$P[A(k,n)]=(1-\lambda)^{n-k}\lambda^k\sum_{j_{k-1}=k-1}^{n-1}\ \sum_{j_{k-2}=k-2}^{j_{k-1}-1}\cdots\sum_{j_1=1}^{j_2-1}\left(1-\frac{\lambda_{j_1}}{\lambda}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_{j_{k-1}}}{\lambda}\right)$$

Dem.
Probemos la afirmación por inducción sobre k.
Para $k=2$, de (3) y considerando n tal que $k\leq n$, se tiene que

$$P[A(2,n)]=\sum_{j=1}^{n-1}\left(P[A(1,j)]\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda}\right)(1-\lambda)^{n-j-1}\lambda\right)$$

luego por (2),

$$\begin{aligned}P[A(2,n)]&=\sum_{j=1}^{n-1}\left((1-\lambda)^{j-1}\lambda\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda}\right)(1-\lambda)^{n-j-1}\lambda\right)\\&=(1-\lambda)^{n-2}\lambda^2\sum_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda}\right)\end{aligned}$$

verificándose la afirmación para $k=2$.
Supongamos que vale la fórmula para $k\geq 2$, y veamos que vale para $k+1$. Para ello consideremos $n\geq k+1$, y veamos que por (3)

$$P[A(k+1,n)]=\sum_{j=k}^{n-1}\left(P[A(k,j)]\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda}\right)(1-\lambda)^{n-j-1}\lambda\right)$$

luego por hipótesis inductiva,

$$P[A(k+1,n)] = \sum_{j=k}^{n-1}\left((1-\lambda)^{j-k}\lambda^k \sum_{j_{k-1}=k-1}^{j-1}\sum_{j_{k-2}=k-2}^{j_{k-1}-1}\cdots\sum_{j_1=1}^{j_2-1}\left(1-\frac{\lambda_{j_1}}{\lambda}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_{j_{k-1}}}{\lambda}\right)\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda}\right)(1-\lambda)^{n-j-1}\lambda\right)$$

$$= (1-\lambda)^{n-(k+1)}\lambda^{k+1}\sum_{j=k}^{n-1}\sum_{j_{k-1}=k-1}^{j-1}\sum_{j_{k-2}=k-2}^{j_{k-1}-1}\cdots\sum_{j_1=1}^{j_2-1}\left(1-\frac{\lambda_{j_1}}{\lambda}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_{j_{k-1}}}{\lambda}\right)\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda}\right)$$

lo cual es exactamente lo que deseabamos, si simplemente reemplazamos j por j_k. Por lo tanto la Afirmación queda demostrada.

■

Utilizando una notación equivalente, podemos decir que dados $2 \leq k \leq n$,

$$P[A(k,n)] = (1-\lambda)^{n-k}\lambda^k \sum_{1\leq j_1<j_2<\ldots<j_{k-1}\leq n-1}\left(1-\frac{\lambda_{j_1}}{\lambda}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_{j_{k-1}}}{\lambda}\right). \tag{4}$$

5 Probabilidad de los $B(n)$

Como

$$\left(1-\frac{\lambda_{j_1}}{\lambda}\right)\left(1-\frac{\lambda_{j_2}}{\lambda}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_{j_{k-1}}}{\lambda}\right) =$$
$$= 1 - \sum_{1\leq r_1\leq k-1}\frac{\lambda_{j_{r_1}}}{\lambda} + \sum_{1\leq r_1<r_2\leq k-1}\frac{\lambda_{j_{r_1}}\lambda_{j_{r_2}}}{\lambda^2} - \ldots + (-1)^{k-2}\sum_{1\leq r_1<\ldots<r_{k-2}\leq k-1}\frac{\lambda_{j_{r_1}}\ldots\lambda_{j_{r_{k-2}}}}{\lambda^{k-2}} + (-1)^{k-1}\frac{\lambda_1\ldots\lambda_{k-1}}{\lambda^{k-1}}$$
$$= 1 + \sum_{m=1}^{k-1}\left((-1)^m \sum_{1\leq r_1<\ldots<r_m\leq k-1}\frac{\lambda_{j_{r_1}}\ldots\lambda_{j_{r_m}}}{\lambda^m}\right)$$

se tiene que

$$P[B(n)] = \sum_{k=1}^{n} P[A(k,n)]$$
$$= (1-\lambda)^{n-1}\lambda + \sum_{k=2}^{n}\left[(1-\lambda)^{n-k}\lambda^k \sum_{1\leq j_1<j_2<\ldots<j_{k-1}\leq n-1}\left(1-\frac{\lambda_{j_1}}{\lambda}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_{j_{k-1}}}{\lambda}\right)\right]$$

(Nota: De ahora en más, para simplificar notación, consideraremos que cuando los índices de las sumatorias no tengan sentido, e.d., cuando se este sumando sobre un conjunto vacío de indices, la suma da igual a 1.)

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[(1-\lambda)^{n-k}\lambda^k \sum_{1\leq j_1<j_2<\ldots<j_{k-1}\leq n-1}\left(1-\frac{\lambda_{j_1}}{\lambda}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_{j_{k-1}}}{\lambda}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{(1-\lambda)^{n-k}\lambda^k \sum_{1\leq j_1<j_2<\ldots<j_{k-1}\leq n-1}\left[1+\sum_{m=1}^{k-1}\left((-1)^m\sum_{1\leq r_1<\ldots<r_m\leq k-1}\frac{\lambda_{j_{r_1}}\ldots\lambda_{j_{r_m}}}{\lambda^m}\right)\right]\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{(1-\lambda)^{n-k}\lambda^k \sum_{1\leq j_1<j_2<\ldots<j_{k-1}\leq n-1}\ \sum_{m=0}^{k-1}\left((-1)^m\sum_{1\leq r_1<\ldots<r_m\leq k-1}\frac{\lambda_{j_{r_1}}\ldots\lambda_{j_{r_m}}}{\lambda^m}\right)\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \left\{ (1-\lambda)^{n-k} \lambda^{k} \sum_{m=0}^{k-1} \left((-1)^{m} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_{k-1} \leq n-1} \;\; \sum_{1 \leq r_1 < \ldots < r_m \leq k-1} \frac{\lambda_{j_{r_1}} \ldots \lambda_{j_{r_m}}}{\lambda^m} \right) \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\{ (1-\lambda)^{n-k} \lambda^{k} \sum_{m=0}^{k-1} \left[(-1)^{m} \binom{n-1-m}{k-1-m} \sum_{1 \leq r_1 < \ldots < r_m \leq n-1} \frac{\lambda_{j_{r_1}} \ldots \lambda_{j_{r_m}}}{\lambda^m} \right] \right\} \\
&= \lambda \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=0}^{k-1} \left[(-1)^{m} \binom{n-1-m}{k-1-m} (1-\lambda)^{n-k} \lambda^{k-1} \sum_{1 \leq r_1 < \ldots < r_m \leq n-1} \frac{\lambda_{j_{r_1}} \ldots \lambda_{j_{r_m}}}{\lambda^m} \right] \\
&= \lambda \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=0}^{k-1} \left[(-1)^{m} \binom{n-1-m}{k-1-m} (1-\lambda)^{n-k} \lambda^{k-1-m} \sum_{1 \leq r_1 < \ldots < r_m \leq n-1} \lambda_{j_{r_1}} \ldots \lambda_{j_{r_m}} \right] \\
&= \lambda \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{1 \leq r_1 < \ldots < r_m \leq n-1} \left[(-1)^{m} \lambda_{j_{r_1}} \ldots \lambda_{j_{r_m}} \binom{n-1-m}{k-1-m} (1-\lambda)^{n-k} \lambda^{k-1-m} \right] \\
&= \lambda \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=m+1}^{n} \sum_{1 \leq r_1 < \ldots < r_m \leq n-1} \left[(-1)^{m} \lambda_{j_{r_1}} \ldots \lambda_{j_{r_m}} \binom{n-1-m}{k-1-m} (1-\lambda)^{n-k} \lambda^{k-1-m} \right] \\
&= \lambda \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-m-1} \sum_{1 \leq r_1 < \ldots < r_m \leq n-1} \left[(-1)^{m} \lambda_{j_{r_1}} \ldots \lambda_{j_{r_m}} \binom{n-1-m}{k} (1-\lambda)^{n-m-1} \lambda^{k} \right] \\
&= \lambda \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{1 \leq r_1 < \ldots < r_m \leq n-1} \left[(-1)^{m} \lambda_{j_{r_1}} \ldots \lambda_{j_{r_m}} \sum_{k=0}^{n-m-1} \binom{n-1-m}{k} (1-\lambda)^{n-m-1} \lambda^{k} \right] \\
&= \lambda \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{1 \leq r_1 < \ldots < r_m \leq n-1} \left\{ (-1)^{m} \lambda_{j_{r_1}} \ldots \lambda_{j_{r_m}} [(1-\lambda)+\lambda]^{n-m-1} \right\} \\
&= \lambda \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{1 \leq r_1 < \ldots < r_m \leq n-1} \left\{ (-1)^{m} \lambda_{j_{r_1}} \ldots \lambda_{j_{r_m}} \right\} \\
&= \lambda (1-\lambda_1)(1-\lambda_2) \ldots (1-\lambda_{n-1})
\end{aligned} \tag{5}
$$

6 X es una variable aleatoria con tasas discretas de riesgo $\{\lambda_n\}$

Por (1) y (5), se tiene que

$$P[X=n] = \lambda(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\ldots(1-\lambda_{n-1})\frac{\lambda_n}{\lambda} = (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\ldots(1-\lambda_{n-1})\lambda_n$$

y por lo tanto X resulta una variable aleatoria con tasas discretas de riesgo $\{\lambda_n\}$.