Matemática Financiera

Patricia Kisbye

Profesorado en Matemática
Facultad de Matemática, Astronomía y Física

2011

Presentación de la materia

- Matemática financiera: ambiente de certidumbre.
  - Operaciones financieras.
  - Capitalización simple y compuesta
  - Interés, capital, tasas de interés, tasas equivalentes, ...
  - Anualidades o rentas.
  - Sistemas de amortización.
- Finanzas: ambiente de incertidumbre.
  - El mercado financiero.
  - Bonos, acciones, derivados financieros.
  - Opciones.
  - Modelos probabilísticos: Árboles.
  - Caso continuo: el modelo de Black-Scholes.

Un poco de historia

Definición (Operación financiera)

Una operación financiera es un préstamo, en el que un *prestamista* entrega a un *prestatario* una cierta cantidad de dinero, a cambio de que este último lo devuelva al cabo de un cierto tiempo con un recargo o *interés*.

- ¿Por qué en una operación financiera se cobra un interés?
- ¿Siempre se beneficia el prestamista?
- ¿Por qué el prestatario acepta estas condiciones?

Un poco de historia

Irving Fisher (1867-1947): *Teoría del Interés* (1930), expuso las razones que fundamentan la exigencia del cobro de intereses

- Utilidad de un bien de consumo.
- La utilidad marginal es una función decreciente y cóncava.
- El prestamista exige el interés a cambio de la utilidad perdida.
- El prestatario se beneficia del préstamo, aún pagando un cierto interés.

Elementos de una operación financiera

En una operación financiera se distinguen los siguientes elementos:

- $C = C(t_0)$: El *capital inicial* en préstamo.
- $C(t_1)$: El *capital final* devuelto.
- $t = t_1 - t_0$: El *tiempo* que dura la operación.
- I: El *interés* cobrado en la operación.

Ausencia de arbitraje

Para dar sentido al concepto de interés, se fija la siguiente hipótesis en el mercado financiero.

Principio de no arbitraje:
Dos operaciones financieras equivalentes producen el mismo interés en un mismo período de tiempo.

o equivalentemente

No es posible obtener beneficio neto ingresando en dos operaciones financieras.

El interés y la tasa de interés

- El interés es la diferencia entre el capital devuelto y el capital prestado.
- Se expresa en unidades monetarias.

$$\boxed{I = C(t_1) - C(t_0)}$$

- La tasa de interés es el interés cobrado por unidad de capital en una unidad de tiempo.
- Es independiente de la unidad monetaria elegida.

$$\boxed{i = \frac{C(t_1) - C(t_0)}{C(t_0)}}.$$

- Las tasas se expresan en tanto por uno o tanto por ciento:

$$\boxed{i \qquad \leftrightarrow \qquad 100 \cdot i\%}$$

.

La unidad de tiempo

En una operación financiera el tiempo está expresado en cierta unidad de tiempo.

Las unidades de tiempo usuales son:

- año natural: 365 días.
- año comercial o financiero: 360 días.
- mes: doceava parte del año.
- día.

Año comercial: cada mes es de $\frac{360}{12} = 30$ días.

Año natural: cada mes es de $\frac{365}{12} = 30,4167$ días.

Métodos para determinar el interés

Dada la tasa de interés, el interés a cobrar puede determinarse según:

Capitalización simple

- El capital crece de un modo lineal.
- El crecimiento porcentual del capital es decreciente.

Capitalización compuesta.

- El capital crece de un modo exponencial.
- El crecimiento porcentual del capital es constante.

Capitalización simple

En un régimen de capitalización simple, el interés es directamente proporcional al capital en préstamo y al tiempo que dure la operación:

$$I = C \cdot i \cdot t.$$

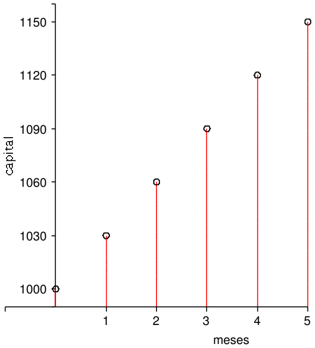


Figure: Interés simple

Tasas de interés en la capitalización simple

En el régimen de capitalización simple, la tasa de interés depende inversamente de la unidad de tiempo.

Ejemplo

- Una tasa del 0.5% mensual produce el mismo interés que una tasa del 6% anual.
- Una tasa del 1% diaria produce el mismo interés que una tasa del 30% cada 30 días.

Tasas equivalentes

Definición

Dos tasas se dicen equivalentes si para un mismo capital producen el mismo interés en un mismo tiempo.

- Bajo la capitalización simple, dos tasas proporcionales también son equivalentes.
- Esta propiedad no es cierta para el caso de la capitalización compuesta.
- La noción de equivalencia depende de la ley de capitalización aplicada.

Capitalización compuesta

Definición

En un régimen de capitalización compuesta, el interés producido en cada unidad de tiempo se incorpora al capital. Se dice que los intereses se capitalizan.

$$\boxed{C(n) = C \cdot (1 + i)^n}$$

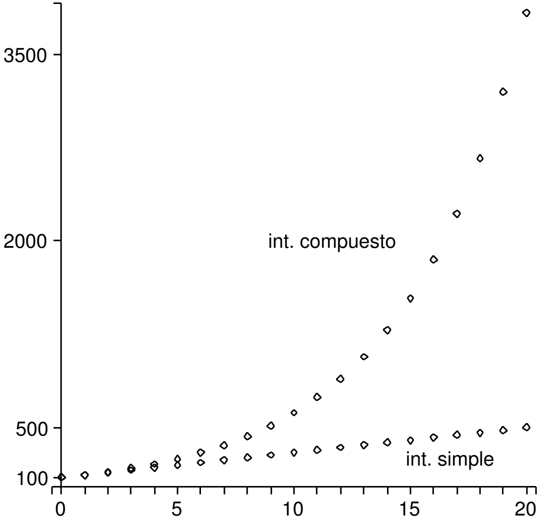
- Capitalización simple: el capital se incrementa siguiendo una progresión aritmética.

$$\$1000, \quad \$1030, \quad \$1060, \quad \$1090, \quad \$1120, \quad \mathbf{\$1150},$$

- Capitalización compuesta: el capital se incrementa de acuerdo a una progresión geométrica.

$$\$1000, \quad \$1030, \quad \$1060.9, \quad \$1092.727, \quad \$1125.5088, \quad \mathbf{\$1159.2741}.$$

Gráficos comparativos



Equivalencias en la capitalización compuesta

- Las tasas de interés proporcionales no son equivalentes.

$$(1+i)^m \geq 1 + mi, \qquad m = 2, 3, 4, \ldots.$$

- Si i' corresponde a m unidades de tiempo, entonces i es equivalente a i' si

$$(1+i)^m = 1 + i'.$$

Ejemplo

Una tasa mensual $i = 0.05$ aplicada durante 12 meses produce un interés por unidad de capital igual a

$$(1.05)^{12} - 1 = 0.79585.$$

Por lo tanto la tasa anual equivalente es $i' = 0.79585$.

Principio básico de las finanzas

- Oportunidad de arbitraje: Es la posibilidad de invertir un dos capitales idénticos durante un mismo período de tiempo, con diferente rentabilidad.
- El arbitraje permite obtener interés positivo sin capital inicial

Un principio básico de la economía es la hipótesis de no arbitraje.

- Bajo esta hipótesis, dos operaciones alternativas realizadas con capitales idénticos y durante un mismo período de tiempo, producen el mismo interés.

Tasa de interés efectiva

Consideremos una operación financiera, y fijamos el inicio en $t = 0$.
Sea t un instante durante el período de la operación, $t + 1$: una unidad de tiempo posterior.

Definición

Diremos que $i(t)$ es la tasa de interés efectiva en $[t, t + 1]$ si el interés producido por una unidad de capital en dicho período es $i(t)$. Es decir, el capital final producido es $1 + i(t)$.

Capital acumulado

- La tasa de interés efectiva está expresada en la unidad de tiempo correspondiente: anual, mensual, diaria, ...
- Asumiremos un ambiente de certidumbre: $i(0)$, $i(1)$, $i(2)$, ... son conocidas.
- Un capital C invertido durante n unidades de tiempo producirá un capital:

$$C \cdot (1 + i(0) \cdot (1 + i(1)) \cdots (1 + i(n - 1))$$

- Si las tasas de interés efectivas son constantes e iguales a i, el capital final será

$$C \cdot (1 + i)^n$$

Ejemplo

Ejemplo

La tasa de interés efectiva que se paga por un depósito es del 2.5% los dos primeros años, con una reducción al 2% a partir de los dos años.
Calcular el capital acumulado luego de 7 años por una inversión de \$10 000.

<u>Solución:</u>

$$C(7) = C_0 \cdot (1 + 0.025)^2 \cdot (1 + 0.02)^5 = 11\,599,75$$

El capital acumulado es de \$11 599.75.

- La tasa de interés efectiva anual equivalente es $i = 2.14\%$.

El valor temporal del dinero

- La existencia de las tasas de interés implica un valor temporal del dinero.
- Es preferible disponer de \$1000 hoy que \$1000 dentro de un año.
- Capital financiero: (C, t), donde C es un capital disponible en el tiempo t.
- Equivalencia de capitales financieros: Leyes de capitalización.

Subperíodos y tasa de interés

Definición

Dado un período de tiempo $[t, t+1]$, $i(t)$ la tasa de interés efectiva en dicho período, y m un número natural, llamamos tasa de interés efectiva periódica correspondiente al período

$$[t + \frac{s}{m}, t + \frac{s+1}{m}]$$

a la tasa de interés efectiva en dicho período.

$$\boxed{i^{(m)}\left(t + \frac{s}{m}\right)}$$

Tasas de interés en subperíodos

El principio de no arbitraje implica que

$$1 + i(t) = \left(1 + i^{(m)}(t)\right)\left(1 + i^{(m)}(t + \frac{1}{m})\right)\dots\left(1 + i^{(m)}(t + \frac{m-1}{m})\right)$$

Si las tasas de interés periódicas son iguales $(= i^{(m)})$

$$1 + i(t) = \left(1 + i^{(m)}(t)\right)^m.$$

- $i(t)$ e $i^{(m)}$ son tasas equivalentes.

Ejemplo

Ejemplo

Dada una tasa de interés anual $i(t)$ del 3%, entonces

- $i^{(2)} = 1.4889\%$ es una tasa semestral equivalente.
- Las tasas semestrales $i_1^{(2)}(t) = 1.25\%$ e $i_2^{(2)}(t + \frac{1}{2}) = 1.7284\%$ producen en una unidad de tiempo el mismo interés. No son equivalentes a la tasa anual del 3%.

$$(1 + 0.014889)^2 = 1.03$$

$$(1 + 0.0125)(1 + 0.017284) = 1.03.$$

Tasas de interés nominales

Definición

Dada una tasa de interés efectiva $i(t)$, y una tasa periódica $i^{(m)}(t)$, llamamos tasa nominal del período $[t, t+1]$ a la cantidad

$$j^{(m)}(t) = m \cdot i^{(m)}(t).$$

- La tasa nominal $j^{(m)}(t)$ es proporcional a $i^{(m)}(t)$.
- La tasa nominal no es aplicable, es una tasa enunciada.
- La tasa nominal no es equivalente a la tasa periódica $i^{(m)}$, y es estrictamente menor que $i(t)$ si $m > 1$.

Ejemplo

Tasa nominal anual $j^{(m)}$ del 8%		
frecuencia	$i^{(m)}(t)$	$i(t)$
$m = 1$	0.08	0.08
$m = 2$	0.04	0.0816
$m = 4$	0.02	0.082432
$m = 12$	0.00667	0.083
$m = 365$	0.000219	0.083278

- La sucesión de tasas equivalentes anuales convergen a un único valor.

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{j^{(m)}}{m}\right)^m = j$$

Capitalización instantánea

Definición

Dada una tasa de interés $i(t)$, correspondiente a una unidad de tiempo (año), se define la tasa de interés nominal instantánea al límite

$$r(t) = \lim_{m\to\infty} j^{(m)}(t)$$

donde $i^{(m)}(t)$ es la tasa periódica equivalente a $i(t)$ y $m \cdot i^{(m)}(t) = j^{(m)}(t)$.

- La tasa $r(t)$ es la tasa nominal pactada diariamente en el mercado financiero.

Capitalización continua

Dado un período de tiempo, se han definido las siguientes tasas:

- Tasa de interés efectiva en el período: $i(t)$.
- Tasa de interés efectiva en un subperíodo: $i^{(m)}$
- Tasa de interés nominal con capitalización en el superíodo: $j^{(m)}(t)$

Se cumplen las siguientes relaciones:

$$(1 + i^{(m)})^m = 1 + i \qquad\qquad j^{(m)}(t) = m \cdot i^{(m)}$$

Ejemplo

Tasa efectiva anual del 5%		
frecuencia	$i^{(m)}$	$j^{(m)}(t)$
$m = 1$	0.05	0.05
$m = 2$	0.024695	0.049390
$m = 4$	0.012272	0.049089
$m = 12$	0.004074	0.048889
$m = 365$	0.000134	0.048793

- La sucesión de tasas nominales anuales convergen a un único valor.

$$\lim_{m\to\infty} j^{(m)}(t) = r(t)$$

Tasa nominal instantánea

Dado un período de tiempo, asumamos que se conocen

$$j^{(1)}(t),\ j^{(2)}(t),\ j^{(3)}(t),\ \ldots, j^{(m)}(t), \ldots$$

Definición

Se llama tasa de interés nominal con capitalización continua, o tipo de interés instantáneo al límite

$$r(t) = \lim_{t \to \infty} j^{(m)}(t)$$

siempre que este límite exista.

Tasa nominal instantánea

Ejemplo

Sea $i = 0.08$ la tasa efectiva anual. Entonces $i^{(m)} = 1.08^{1/m} - 1$, por lo cual

$$j^{(m)}(t) = m \cdot (1.08^{1/m} - 1).$$

En este caso, la tasa instantánea, o tasa nominal con capitalización continua, viene dada por

$$r(t) = r = \log(1.08).$$

La tasa $r(t)$

Dado un capital $C(t)$ se tiene que

$$C(t+1/m) - C(t) = C(t) \cdot i^{(m)}(t) = \frac{1}{m} \cdot C(t) \cdot j^{(m)}(t).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{C(t+1/m) - C(t)}{1/m} = \lim_{t\to\infty} C(t) \cdot j^{(m)}(t).$$

es decir

$$\boxed{\frac{d}{dt} C(t) = C(t) \cdot r(t).}$$

Ecuación diferencial para $r(t)$

Considerando un intervalo de tiempo $[t_0, t]$, se tiene que

$$\frac{C'(t)}{C(t)} = r(t),$$

por lo cual

$$\log C(t) - \log C(t_0) = \int_{t_0}^{t} r(s)\, ds.$$

Usando propiedades del logaritmo se obtiene que:

$$\boxed{C(t) = C(t_0) \cdot exp(\int_{t_0}^{t} r(s))\, ds = C(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} r(s)\, ds}.}$$

La tasa de interés instantánea

Sea el tipo de interés instantáneo constante: $r(t) = r$. Se tiene entonces que

$$C(t) = C(t_0)\, e^{r(t-t_0)}.$$

En particular, tomando $t_0 = 0$ y $t = 1$, debe cumplirse que

$$C(1) \cdot (1 + i) = C(0) \cdot e^r.$$

- Para una tipo de interés instantáneo constante r, la tasa de interés efectiva está dada por $i = e^r - 1$.

Factor de acumulación

Llamaremos factor de acumulación correspondiente al plazo $[t_0, t_1]$, a la cantidad

$$A(t_0, t_1) = e^{\int_{t_0}^{t_1} r(s)\, ds}.$$

- $C(t_1) = C(t_0)\, A(t_0, t_1)$
- $i(t_0) = A(t_0, t_0 + 1) - 1$
- $i^{(m)}(t_0) = A(t_0, t_0 + \frac{1}{m}) - 1$

La función de acumulación $t \mapsto A(t_0, t)$ está dada por

$$A(t_0, t) = e^{\int_{t_0}^{t} r(s)\, ds}.$$

Propiedades de la función de acumulación

- $A(t_0, t) \geq 1$, para todo $t \geq 0$.
- $A(t_0, t_0) = 1$
- Si $t_0 < t_1 < t_2$, entonces
$$A(t_0, t_1) < A(t_0, t_2).$$
- Principio de consistencia Si $t_0 < t_1 < t_2$, entonces
$$A(t_0, t_2) = A(t_0, t_1) \cdot A(t_1, t_2).$$

Observación: ¿Qué ocurre si se utiliza la capitalización simple?

Factor de descuento

Definición

El valor descontado en t de un capital de valor nominal C disponible o con vencimiento en t_2 es

$$C \cdot v(t_1, t_2) = \frac{C}{A(t_1, t_2)} = Ce^{-\int_{t_1}^{t_2} r(s)\, ds}.$$

Propiedades de $v(t_1, t_2)$

- $$i(t_0) = \frac{1}{v(t_0, t_0 + 1)} - 1 = \frac{1 - v(t_0, t_0 + 1)}{v(t_0, t_0 + 1)}$$
  $$\boxed{i = \frac{1 - v}{v}.}$$
- $$i^{(m)}(t_0) = \frac{1 - v(t_0, t_0 + \frac{1}{m})}{v(t_0, t_0 + \frac{1}{m})}$$

Función de descuento

Definición

La función de descuento que determina el valor actual de una cantidad monetaria disponible en el tiempo t se define por

$$v(0,t) = v(t) = e^{-\int_0^t r(s)\,ds} \qquad t \geq 0.$$

Propiedades

1. $v(t) = \dfrac{1}{A(0,t)}$
2. $v(0) = 1$
3. $0 < v(t) < 1$, para $t > 0$.
4. Si $t_1 < t_2$, entonces $v(t_1) < v(t_2)$.
5. Si $t_1 < t_2$, $v(t_1) \cdot v(t_1, t_2) = v(t_2)$

Rentas o Anualidades

Definición

Un capital financiero es un par (C, t) donde C es un capital disponible en el tiempo t.

Una renta o anualidad es una sucesión de capitales financieros (C_1, t_1), (C_2, t_2), ..., (C_n, t_n), ..., con $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \ldots$.

Elementos de la renta

Se denomina:

- cuota o término: a cada uno de los pagos C_i, $i \geq 1$.
- Períodos de la renta: $[t_k, t_{k+1}]$, $k \geq 1$.
- Amplitud del período: $t_{k+1} - t_k$

Las rentas se caracterizan por:

- momentos de los pagos: cuotas vencidas o cuotas adelantadas.
- monto de las cuotas: cuotas constantes o cuotas variables.
- duración de la renta: rentas ciertas o rentas perpetuas
- períodos: constantes o variables.
- tasa de interés en cada período: constante o variable.

Rentas ciertas

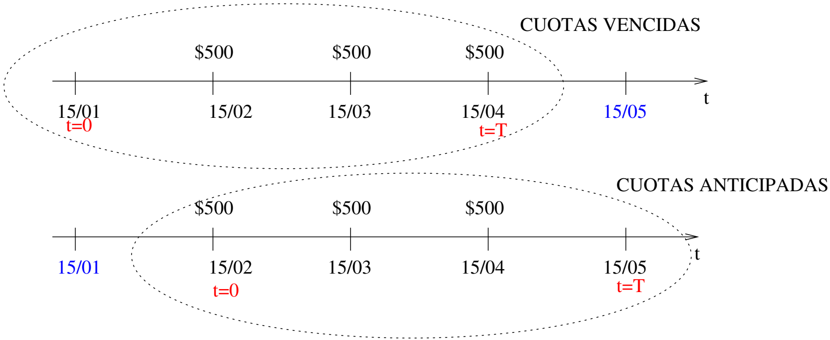


Figure: Rentas pospagable y prepagable

Rentas ciertas

Asumiremos que

- los períodos de tiempo son constantes: $t_{k+1} - t_k = 1$, para cierta unidad de tiempo.
- la tasa de interés es constante, e igual a i.
- Renta prepagable, o de cuotas anticipadas: el origen de la recta es t_1.
- Renta pospagable, o de cuotas vencidas: el origen de la recta es $t_0 = t_1 - 1$.
- Final de la renta: n períodos posteriores al origen.

Valor actual y final de una renta

Definición

Dada una renta cierta $(C_1, t_1), (C_2, t_2), \ldots, (C_n, t_n)$ llamaremos

- Valor actual de la renta: a la suma de los valores actuales de cada uno de los capitales financieros calculada en el origen de la renta.
- Valor final de la renta: a la suma de los valores finales de cada uno de los capitales financieros calculada en el final de la renta.

Rentas constantes

Consideremos una renta de n cuotas constantes iguales a C.

Cuotas vencidas: origen en $t_0 = t_1 - 1$.

$$\text{Valor actual} = C \cdot \left((1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-n}\right).$$

$$\text{Valor final} = C \cdot \left(1 + (1+i) + (1+i)^{2} + \cdots + (1+i)^{n-1}\right).$$

$$\boxed{a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} \qquad \boxed{s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^{n}-1}{i}}$$

Rentas constantes

Cuotas anticipadas: origen en t_1.

$$\text{Valor actual} = C \cdot \left(1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-(n-1)}\right).$$

$$\text{Valor final} = C \cdot \left((1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^n\right).$$

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} \qquad \boxed{\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Ejemplo

Ejemplo

Una renta está conformada por 4 cuotas mensuales de \$100, sujetas a una tasa del 3% mensual, y se desea conocer el capital final obtenido al momento de pagar la cuarta cuota.

Solución:

Cuota	Períodos	Valor final
1	3	$100 \cdot (1.03)^3 = 109.2727$
2	2	$100 \cdot (1.03)^2 = 106.09$
3	1	$100 \cdot (1.03) = 103$
4	ninguno	100
Valor final		$100 \cdot \left(1 + (1.03) + (1.03)^2 + (1.03)^3\right) = 418.3627$

Esto es, el valor final de la renta es de \$418,3627. $\square$

Ejemplo

Ejemplo

Una renta está conformada por 4 cuotas mensuales de \$100, sujetas a una tasa del 3% mensual, y se desea conocer el valor actual de la misma al momento de pagar la primera cuota.

Solución:

Cuota	Períodos	Valor final
1	ninguno	100
2	1	$100 \cdot (1.03)^{-1} = 97.0874$
3	2	$100 \cdot (1.03)^{-2} = 94.2596$
4	3	$100 \cdot (1.03)^{-3} = 91.5141$
Valor final		$100 \cdot \left(1 + (1.03)^{-1} + (1.03)^{-2} + (1.03)^{-3}\right) = 382.8613$

Esto es, el valor actual de la renta es de \$382.8613. $\square$

Ejemplo

Ejemplo

Una persona deposita al comienzo de cada año la suma de $2000 en una cuenta que paga una tasa de interés anual del 9%. ¿Cuál es el capital que habrá acumulado al comienzo del sexto año, antes de depositar la sexta cuota?

Solución:

Esta renta puede interpretarse como una anualidad de cinco cuotas anticipadas, cada una de $2.000. La tasa de interés es 0.09, y el número de cuotas es $n = 5$.

$$V_F = 1.09 \cdot 2.\,000 \cdot s_{\overline{5}|0.09} = 13.\,046.66913,$$

es decir, $13.046,67 aproximadamente. □

Cálculo del número de cuotas

Ejemplo

¿Cuántas cuotas mensuales iguales y vencidas de \$3.000 habrá que abonar para que el valor actual de la renta resulte de \$100.000 considerando una tasa del 0.02 mensual?

Sea V_A el valor actual de la renta, entonces $V_A = c \cdot a_{\overline{n}|i}$.

$$\boxed{n = \frac{\log(c) - \log(c - V \cdot i)}{\log(1+i)}}.$$

Proof.

Volviendo a los datos del ejemplo, tenemos que

$$n = \frac{\log(3000) - \log(3000 - 2000)}{\log(1.02)} = \frac{\log(3)}{\log(1.02)} \sim 55,48.$$

□

Anualidades ciertas con cuotas variables

Consideraremos rentas ciertas con cuotas variables, y períodos constantes. En particular, interesan los siguientes casos:

Definición

Dada una renta $(C_1, t_1), (C_2, t_2), \ldots, (C_n, t_n)$, diremos que es

- una renta en progresión aritmética si

$$C_k - C_{k-1} = h,$$

  para cierta constante h.

- una renta en progresión geométrica si

$$\frac{C_k}{C_{k-1}} = q,$$

  para cierta constante $q > 0$.

Rentas en progresión aritmética

La sucesión de capitales es de la forma

$$c,\ c+h,\ c+2\cdot h, \ldots,\ c+(n-1)h,$$

donde c es el valor de la primera cuota, y h es el término de la progresión aritmética.

Observación: $h > -\dfrac{c}{n-1}$.

Ejemplo

En una renta de cuatro cuotas mensuales en progresión aritmética, con $c = 100$ y $h = 15$, las sucesivas cuotas serán 100, 115, 130 y 145.

Ejemplo

Una renta en progresión aritmética puede pensarse como una superposición de n rentas con cuotas constantes.
Para el ejemplo anterior:

	Mes 1	Mes 2	Mes 3	Mes 4
	100	100	100	100
		15	15	15
			15	15
				15
Total	100	115	130	145

Caso general

Momentos	1	2	3	$\dots$	$n-1$	n
	c	c	c	$\dots$	c	c
		h	h	$\dots$	h	h
			h	$\dots$	h	h
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
						h
RENTA	c	$c+h$	$c+2h$	$\dots$	$c+(n-2)h$	$c+(n-1)h$

- El valor actual y final de la renta puede calcularse como la suma de los valores actuales y finales de cada una de estas rentas.

Cuotas vencidas.

Valor de la cuota	Número de cuotas	Valor final
c	n	$c \cdot s_{\overline{n}\rvert r}$
h	$n-1$	$h \cdot s_{\overline{n-1}\rvert r}$
	$\vdots$	
h	3	$h \cdot s_{\overline{3}\rvert r}$
h	2	$h \cdot s_{\overline{2}\rvert r}$
h	1	$h \cdot s_{\overline{1}\rvert r} = h$
Valor final		$h + h\, s_{\overline{1}\rvert r} + h\, s_{\overline{2}\rvert r} + \cdots + h\, s_{\overline{n-1}\rvert r} + c\, s_{\overline{n}\rvert r}$

Table: Valor final: Renta en progresión aritmética con cuotas vencidas

$$\boxed{V_{\text{Final}} = c \cdot s_{\overline{n}\rvert i} + \frac{h}{i} \cdot \left(s_{\overline{n}\rvert i} - n\right)}.$$

Cálculo de valores actuales y finales

Cuotas vencidas

Valor actual	Valor final
$c \cdot a_{\overline{n}\vert i} + \frac{h}{i} \cdot \left(a_{\overline{n}\vert i} - n(1+i)^{-n}\right)$	$c \cdot s_{\overline{n}\vert i} + \frac{h}{i} \cdot \left(s_{\overline{n}\vert i} - n\right)$

Cuotas anticipadas

Valor actual	Valor final
$c \cdot \ddot{a}_{\overline{n}\vert i} + \frac{h}{i} \cdot \left(\ddot{a}_{\overline{n}\vert i} - n(1+i)^{-(n-1)}\right)$	$c \cdot \ddot{s}_{\overline{n}\vert i} + \frac{h}{i} \cdot \left(\ddot{s}_{\overline{n}\vert i} - n(1+i)\right)$

Rentas en progresión geométrica

La sucesión de capitales es de la forma

$$c,\ c \cdot q,\ c \cdot q^2, \ldots,\ c \cdot q^{n-1}$$

donde c es el valor de la primera cuota, y q es el término de la progresión geométrica.

Ejemplo

En una renta de cuatro cuotas en progresión geométrica, con $c = 1000$ y $q = 1.1$, las sucesivas cuotas serán 1000, 1010, 1121 y 1242.1.

Valor final y valor actual

	Valor actual	Valor final
Cuotas vencidas		
$q \neq (1+i)$	$c \cdot \dfrac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q}$	$c \cdot \dfrac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q}$
$q = (1+i)$	$c \cdot n \cdot (1+i)^{-1}$	$c \cdot n \cdot (1+i)^{n-1}$
Cuotas anticipadas	Valor actual	Valor final
$q \neq (1+i)$	$c \cdot (1+i) \cdot \dfrac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q}$	$c \cdot \dfrac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q} \cdot (1+i)^{n+1}$
$q = (1+i)$	$c \cdot n$	$c \cdot n \cdot (1+i)^n$

Cálculo de la tasa de interés

Ejemplo

Si una persona deposita mensualmente \$300 en una cuenta, y al cabo de 4 años tiene un capital de \$15.000, ¿qué rendimiento tuvo su inversión? Es decir, ¿cuál fue la tasa de interés sobre dichos depósitos?

- para $i = 0.05$, arroja un valor final de \$56.407,6
- para $i = 0.005$ el valor final resulta ser \$16229.35, lo que se aproxima bastante más al resultado;
- para $i = 0.0017$ se obtiene \$14.990.67, y
- para $i = 0.0018$ el valor final es de \$15.026,28.

Así que puede estimarse una tasa de interés entre el 0,17% y el 0,18% mensual.

Cálculo del número de cuotas

Ejemplo

¿Cuántas cuotas mensuales iguales y vencidas de \$3.000 habrá que abonar para que el valor actual de la renta resulte de \$100.000 considerando una tasa del 0.02 mensual?

Sea V_A el valor actual de la renta, entonces $V_A = c \cdot a_{\overline{n}|i}$.

$$\boxed{n = \frac{\log(c) - \log(c - V \cdot i)}{\log(1+i)}}.$$

Proof.

Volviendo a los datos del ejemplo, tenemos que

$$n = \frac{\log(3000) - \log(3000 - 2000)}{\log(1.02)} = \frac{\log(3)}{\log(1.02)} \sim 55,48.$$

□

Sistemas de amortización

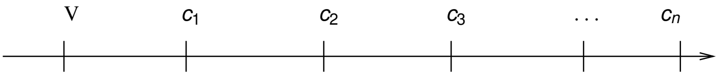
Un sistema de amortización es un método por el cual un capital cedido en préstamo es devuelto por una sucesión de pagos o cuotas.
Estas cuotas periódicas constituyen una renta cuyo valor actual deberá ser igual al préstamo otorgado.

Características de un sistema de amortización

- Es una renta cierta cuyo valor actual al momento del préstamo es igual al préstamo otorgado.

$$c_1, c_2, \ldots, c_n.$$

- Cada cuota c_k está compuesta por:
  - cuota de amortización real v_k
  - cuota de interés s_k.



Composición de las cuotas

Para cualquier sistema de amortización se verifica:

- El valor actual de la renta es igual al préstamo otorgado V.
- La suma de las cuotas de amortización real v_k es igual a V.

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = V.$$

- El capital adeudado en el momento k, VA_k, es igual al valor actual de las cuotas que restan pagar y a la suma de las cuotas de amortización que restan pagar.
- La cuota de interés s_k es el interés sobre el capital adeudado durante el k-ésimo período de la renta:

$$s_k = \big(V - (v_1 + v_2 + \cdots + v_{k-1})\big)i,$$

siendo i la tasa de interés durante dicho período.

Sistemas de amortización

Los sistemas de amortización más usuales son los siguientes:

- Sistema francés: Todas sus cuotas son iguales

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n.$$

- Sistema alemán: Todas las cuotas de amortización real son iguales:

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_n.$$

- Sistema americano: Las cuotas de amortización real son todas nulas, excepto la última que es igual a V.

Hipótesis

Asumiremos las siguientes hipótesis:

- n períodos constantes, iguales a la unidad de tiempo.
- Tasa de interés constante i.

Bajo estas hipótesis se verifica:

$$V = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \frac{1}{(1+i)^k}.$$

Sistema de amortización alemán

Se caracteriza por tener todas sus cuotas de amortización real iguales.

En el sistema de amortización alemán, las cuotas consituyen una renta cierta en progresión aritmética decreciente, con razón

$$h = -i \cdot \frac{V}{n}$$

$$c_1 = \frac{V}{n} + i \cdot V, \qquad c_{k+1} = c_k - i \cdot \frac{V}{n}.$$

- Las cuotas de interés decrecen en la misma progresión.

$$\boxed{v_k = \frac{V}{n}, \qquad s_k = (n - k + 1)\frac{Vi}{n}}$$

Sistema de amortización francés

Se caracteriza por tener todas sus cuotas iguales.

En el sistema de amortización francés, las cuotas constituyen una renta cierta de cuotas constantes:

$$V = c \cdot a_{\overline{n|}i}.$$

- Las cuotas de interés decrecen.
- Las cuotas de amortización real crecen.

$$\boxed{v_k = \frac{c}{(1+i)^{n+1-k}}, \qquad s_k = c\left(1 - \frac{1}{(1+i)^{n+1-k}}\right)}$$

Sistema de amortización americano

Se caracteriza por tener las primeras $n - 1$ cuotas de amortización real nulas:

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_{n-1} = 0, \qquad v_n = V.$$

- Las cuotas de interés son constantes, e iguales a $i \cdot V$.
- La desventaja es que la última cuota es muy alta:

$$V \cdot (1 + i).$$

- Se suele acompañar por una renta a fin de constituir un fondo de amortización (sinking fund).

Reconstitución del fondo de amortización

En el caso del sistema americano, éste suele combinarse con una renta de cuotas constantes e iguales a f, de modo que

$$f \cdot s_{\overline{n}|i'} = V$$

- El prestatario aporta n cuotas de valor

$$f + V \cdot i.$$

- Las cuotas f están sujetas a una tasa de interés i'.
- La ventaja sobre el sistema francés se da si

$$i' > i.$$

Ejemplo

Ejemplo

Un préstamo de \$1000000 es amortizable en 5 años, con el 15% de interés anual sobre saldos. Los siguientes cuadros resumen los pagos a efectuar según los sistemas alemán y francés respectivamente.

Ejemplo

Período k	Deuda inicial	s_k	v_k	c_k
1	1000000	150000	200000	350000
2	800000	120000	200000	320000
3	600000	90000	200000	290000
4	400000	60000	200000	260000
5	200000	30000	200000	230000
suma		450000	1000000	1450000

Figure: Sistema Alemán

Ejemplo

Período k	Deuda inicial	s_k	v_k	c_k
1	1000000	150000	148315,55	298315,55
2	851684,45	127752,67	170562,89	298315,55
3	681121,56	102168,23	196147,32	298315,55
4	484974,24	72746,14	225569,42	298315,55
5	259404,83	38910,72	259404,83	298315,55
suma		491577,76	1000000	1491577,76

Figure: Sistema Francés

Ejemplo

Período k	Deuda inicial	s_k	v_k	c_k
1	1000000	150000	0,00	150000
2	1000000	150000	0,00	150000
3	1000000	150000	0,00	150000
4	1000000	150000	0,00	150000
5	1000000	150000	1000000,00	1150000
suma		750000	1000000	1750000

Figure: Sistema Americano

Bonos

Definición (Bono)

Es un certificado en el cual se declara que un prestatario adeuda una suma específica. Son emitidos por el prestatario quien establece los términos de la emisión.
Los inversores compran el bono al precio de emisión, o se ofrecen en subasta al mejor comprador: cotización en el mercado.

- El prestatario devuelve el préstamo en intereses (cupones) y un último pago del Valor Nominal o Principal.

Tipos de bonos:

- Bonos cupón cero
- Bonos con cupón constante

Elementos

- Cupones: son los pagos periódicos que realiza el prestatario en concepto de intereses.
- Tasa cupón: Porcentaje del nominal que es pagado en cada cupón.
- Fecha de amortización: Momento en que se pagará el valor nominal del bono.
- Tanto % de amortización: Porcentaje del nominal que se paga en la fecha de amortización:
  - sobre la par: amortiza más del 100%
  - bajo la par: amortiza menos del 100%
  - a la par: 100% del valor nominal.

Valoración de bonos

La cotización o valuación del bono depende de la tasa de interés del mercado.

- Asumismo $r(t) = r$ constante, $i(t) = e^r - 1$.

$$v(t) = \frac{1}{(1+i)^t}$$

- El valor de un bono se calcula como el valor actual de los flujos de caja:

$$\boxed{V_0 = C_1 v(t_1) + C_2 v(t_2) + \cdots + C_n v(t_n) = \sum_{j=1}^{n} C_j v(t_j)}$$

Valor y cotización del bono

Consideremos un bono con valor nominal N, amortizable a la par, con cupón constante C, y sea V_0 el valor del bono inmediatamente después del pago de un cupón.

$$V_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{C}{(1+i)^j} + \frac{N}{(1+i)^n}.$$

- Si $c = i$, entonces $V_0 = N$. El bono cotiza a la par.
- Si $c < i$, entonces $V_0 < N$. El bono cotiza bajo la par.
- Si $c > i$, entonces $V_0 > N$. El bono cotiza sobre la par.

Observación: no hay dependencia del número de cupones que restan pagar (n).

Cupón corrido

Sea $V(t)$ el valor del bono en un tiempo t, $0 < t < 1$. Es decir, en un tiempo intermedio entre dos pagos consecutivos de cupón.

$$V(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{C}{(1+i)^{j-t}} + \frac{N}{(1+i)^{n-t}} = V_0\,(1+i)^t.$$

Interés o cupón corrido

- Es una aproximación lineal al interés generado desde el pago del último cupón.
- Fórmula

$$\text{interés corrido} = \text{cupón} \times \frac{\text{días desde el último cupón}}{\text{período entre cupones}}$$

Bonos cupón cero

Características

- Ofrece un único pago en la fecha de vencimiento T.
- No hay pago de cupones.
- El valor actual está dado por

$$V_0 = \frac{N}{(1+i)^T}.$$

Rendimientos del bono

Ejemplo

Un bono con valor nominal \$100 provee cupones a una tasa del 6% anual, semestralmente. Las *n*-tasas de interés anuales para los próximos dos años están dadas por:

Madurez (años)	Tasa (%)
0.5	5.0
1.0	5.8
1.5	6.4
2.0	6.8

Valor presente del bono:

$$3\,e^{-0.05\times 0.5} + 3\,e^{-0.058\times 1} + 3\,e^{-0.064\times 1.5} + 103\,e^{-0.068\times 2} = 98.39$$

Tasa Interna de Rentabilidad

$$3\,e^{-y\times 0.5} + 3\,e^{-y\times 1} + 3\,e^{-y\times 1.5} + 103\,e^{-y\times 2} = 98.39$$

$$\boxed{y = 6.76\%}$$

- P_n: precio de amortización del bono en $t = t_n$.
- P_0: valoración del bono en $t = t_0$.

$$P_0 = \frac{P_n}{(1+R)^{t_n - t_0}} = P_n\,e^{-y(t_n - t_0)}.$$

- R: T.I.R.: en tipo de interés efectivo periodal.
- y: T.I.R.: en tipo de interés instantáneo.