Procesos de Poisson

Patricia Kisbye

FaMAF

25 de marzo, 2008

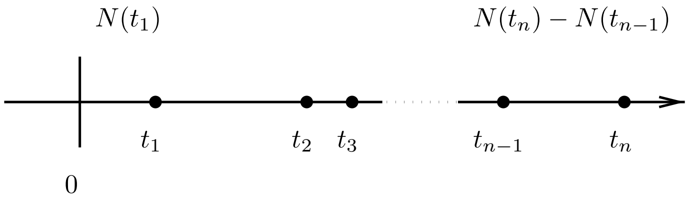
Proceso de Poisson homogéneo

Definición

$(N(t))_{t \geq 0}$ es un proceso de Poisson homogéneo de razón λ, $\lambda > 0$, si:

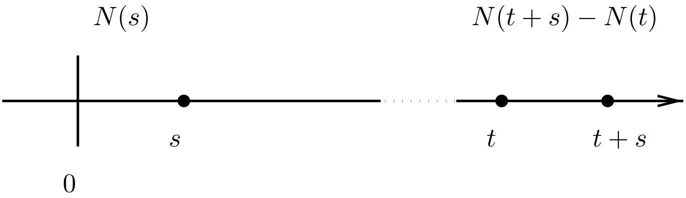
1. $N(0) = 0$
2. para cada $n \geq 1$ y cada partición $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ se tiene que $N(t_0)$, $N(t_1) - N(t_0)$, $\ldots$, $N(t_n) - N(t_{n-1})$ son variables aleatorias independientes.
3. Para cada $t \geq 0$, $s > 0$, se cumple que la distribución de $N(t+s) - N(t)$ es igual a la de $N(s)$.
4. $\lim_{h \to 0} \frac{P(N(h)=1)}{h} = \lambda$,
5. $\lim_{h \to 0} \frac{P(N(h) \geq 2)}{h} = 0$.

Incrementos independientes



En dos intervalos de tiempo disjuntos, las variables ”número de llegadas” son independientes.

Incrementos estacionarios



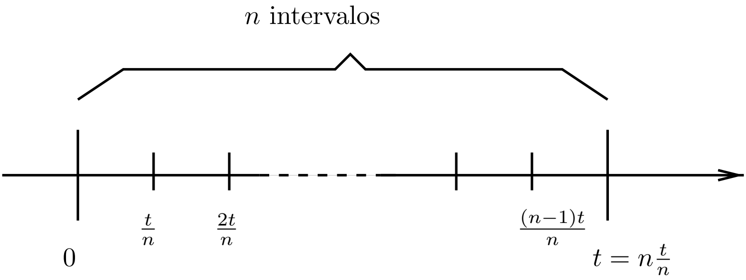
La distribución del número de llegadas depende sólo de la longitud del intervalo.

Ocurrencia de 1 o más eventos

- $\lim_{h\to 0} \frac{P(N(h)=1)}{h} = \lambda$,
- La probabilidad de que ocurra un evento en un intervalo de tiempo pequeño es proporcional al tamaño del intervalo. Constante = λ.

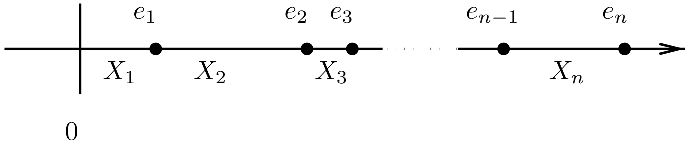
- $\lim_{h\to 0} \frac{P(N(h)\geq 2)}{h} = 0$.
- La probabilidad de ocurrencia de dos o más eventos en un intervalo muy pequeño es cero.

La variable aleatoria $N(t)$



- En cada subintervalo, el número de llegadas es una v.a. Bernoulli, con $p = \lambda \frac{t}{n}$
- Para n grande, el número de llegadas en el intervalo $[0, t]$ converge a una Poisson, con media $n \cdot \lambda \frac{t}{n} = \lambda$.
- $N(t)$ es una variable aleatoria Poisson de media $\lambda \cdot t$.

Tiempos de llegada



- X_1: tiempo transcurrido hasta el primer evento.
- X_j: tiempo transcurrido entre el $(j-1)$-ésimo evento y el j-ésimo, para $j > 1$.

La variable *tiempo de llegada*

- $P(X_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$
- X_1 es una variable aleatoria exponencial de parámetro λ.
- $P(X_j > t \mid X_1 = s_1, \ldots, X_{j-1} = s_{j-1}) =?$, sea $s = s_1 + \cdots + s_{j-1}$.

$$\begin{aligned} P(0 \text{ eventos en } (s, s+t] \quad &| \quad X_1 = s_1, \ldots, X_{j-1} = s_{j-1}) \\ \text{incrementos independientes} \Rightarrow \quad &= \quad P(0 \text{ eventos en } (s, s+t]) \\ \text{incrementos estacionarios} \Rightarrow \quad &= \quad e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Distribución de las variables tiempo de llegada

Proposición

Las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots,$ son v.a. independientes, igualmente distribuidas, con distribución exponencial con parámetro λ.

$$E[X_i] = \frac{1}{\lambda}, \qquad \forall i.$$

Variable aleatoria gamma

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

$$f_n(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Definición

Una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

se dice una variable aleatoria gamma con parámetros (n, λ).

Variable aleatoria gamma

Corolario

La suma de n variables aleatorias exponenciales, cada una de ellas de parámetro λ, es una variable aleatoria gamma de parámetro (n, λ).

El proceso de Poisson no homogéneo

Definición

$(N(t))_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson no homogéneo con intensidad $\lambda(t)$, $t \geq 0$, si:

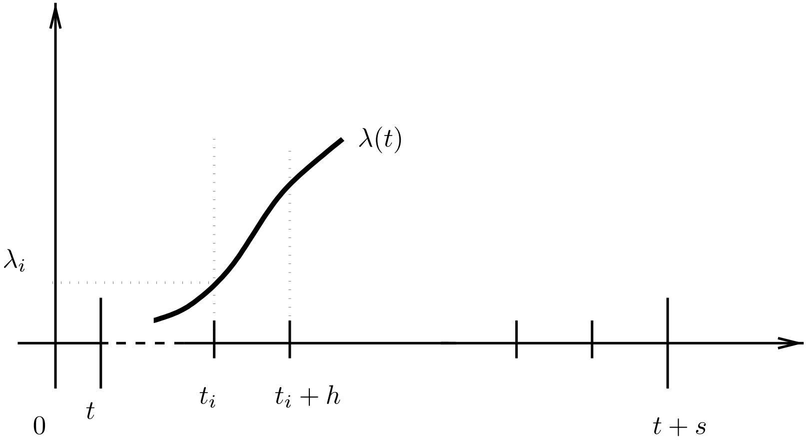
1. $N(0) = 0$
2. para cada $n \geq 1$ y cada partición $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ se tiene que $N(t_0)$, $N(t_1) - N(t_0)$, $\ldots$, $N(t_n) - N(t_{n-1})$ son variables aleatorias independientes.
3. $\lim_{h\to 0} \frac{P(N(t+h)-N(t)=1)}{h} = \lambda(t)$,
4. $\lim_{h\to 0} \frac{P(N(t+h)-N(t)=1)\geq 2)}{h} = 0$.

Valor medio del proceso

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds$$

- Si $\lambda(t) = \lambda$, constante, entonces $m(t) = \lambda \cdot t$.

La variable número de eventos: $N(t+s) - N(t)$



La variable número de eventos: $N(t+s) - N(t)$

$$h \approx 0.$$

$$P(N(t_i + h) - N(t_i) = 1) \approx \lambda_i h \approx e^{-\lambda_i h} \frac{(\lambda_i h)}{1!}$$

$$P(N(t_i + h) - N(t_i) = 0) \approx 1 - \lambda_i h \approx e^{-\lambda_i h}$$

$$P(N(t_i + h) - N(t_i) = k) = 0 \approx e^{-\lambda_i h} \frac{(\lambda_i h)^k}{k!}, \quad k > 1$$

Número de eventos en $(t, t+s]$

- El número de eventos en un intervalo muy pequeño $[t_i, t_i + h)$ se puede considerar una v.a. Poisson de media $\lambda_i h$
- La suma de n v. a. Poisson $X_i \sim \mathcal{P}(\mu_i)$ independientes es una v.a. Poisson $\mathcal{P}(\sum_i \mu_i)$.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot h \longrightarrow \int_s^{t+s} \lambda(x)\, dx = m(t+s) - m(t).$$

Número de eventos en $(t, t+s]$

Proposición

Para cada $t \geq 0$ y $s > 0$ se tiene que $N(t+s) - N(t)$ es una variable aleatoria Poisson con media

$$m(t+s) - m(t) = \int_t^{t+s} \lambda(x)\, dx.$$

Corolario

Si $\lambda(t) = \lambda$ (es constante), $N(t+s) - N(t)$ es una variable aleatoria Poisson con media λt.

Poisson homogéneo y Poisson no homogéneo

- Existen eventos del tipo A y eventos del tipo B.
- Independientemente de lo que ocurrió antes, si ocurre un evento del tipo A entonces ocurre uno del tipo B con probabilidad $p(t)$.
- $N(t)$= número de eventos del tipo A en $[0, t]$
- $\mathcal{A}(t)$= número de eventos del tipo B en $[0, t]$.

Proposición

Si $(N(t))_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson homogéneo con razón $\lambda > 0$, entonces $(\mathcal{A}(t))_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad $\lambda(t) = \lambda \cdot p(t), \forall t > 0$.