Termodinámica y Mecánica Estadística I

Guía 2 (21 de marzo de 2017)

Problema 1: Sea $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una función homogénea de orden α. Muestre que las derivadas parciales

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \frac{\partial F}{\partial x_j}$$

son funciones homogéneas de orden $\alpha - 1$.

Problema 2: Considere el sistema descripto por la ecuación fundamental

$$u = \left(\frac{\theta}{R}\right) s^2 - \left(\frac{R\theta}{v_0^2}\right) v^2$$

a) Encuentre las tres ecuaciones de estado para el sistema.

b) Exprese μ como función de T y P.

Problema 3: Sea un sistema con la ecuación fundamental

$$u = A \frac{s^{5/2}}{v^{1/2}}$$

donde A es una constante.

a) Encuentre las tres ecuaciones de estado en la representación entropía.

b) Muestre mediante un diagrama (dibujado a escala arbitraria) la dependencia de la temperatura con el volumen para una presión fija. Dibuje en un diagrama V-T dos isobaras, correspondientes a dos valores de presión distintos, e indique cuál corresponde a la mayor presión.

Problema 4: Las cantidades macroscópicas que describen el estado de equilibrio de una banda elástica son su longitud L, la tensión Y, la temperatura T y la energía U. La longitud juega un rol análogo al volumen de un gas mientras que la tensión actúa como una *presión negativa*. Sea L_o la longitud de la banda en ausencia de tensión y sea $L \geq L_o$ la longitud de la banda estirada. En el régimen elástico $L < L_1$ (siendo $L_1 > L_o$ alguna longitud característica) se observa experimentalmente que $Y = A(L/n)T$, donde $A(L/n) > 0$ es una función únicamente de L/n y es monótona creciente. Suponiendo que $U(L, T, n) = U(T, n)$ es una función monótona creciente de T:

a) Muestre que la entropía decrece con L (a U constante, i.e., T constante).

b) Muestre que la temperatura aumenta cuando la banda se estira adiabáticamente. Muestre también que la banda se contrae si se aumenta la temperatura manteniendo la tensión constante.

c) Suponga ahora que $U(T)$ y $A(L/n)$ son funciones lineales de T y L respectivamente. Encuentre la relación fundamental.

Problema 5: Dos sistemas particulares, separados por una pared diatérmica, tienen las siguientes ecuaciones de estado:

$$\frac{1}{T^{(1)}} = \frac{3}{2} R \frac{n^{(1)}}{U^{(1)}}$$

$$\frac{1}{T^{(2)}} = \frac{5}{2} R \frac{n^{(2)}}{U^{(2)}}$$

donde $R = 1,986$ cal/mol K, $n^{(1)} = 2$ y $n^{(2)} = 3$.

a) ¿Cuál es la energía interna de cada sistema en el estado de equilibrio, si la energía total en el sistema compuesto es 6000 cal?

b) Si las temperaturas iniciales son $T^{(1)} = 250$ K y $T^{(2)} = 350$ K. ¿Cuáles son los valores de $U^{(1)}$ y $U^{(2)}$ una vez establecido el equilibrio? ¿Cuál es la temperatura de equilibrio?

Problema 6: Dos sistemas particulares tienen las ecuaciones de estado siguientes:

$$\frac{1}{T^{(1)}} = \frac{3}{2}R\frac{n^{(1)}}{U^{(1)}} , \qquad \frac{P^{(1)}}{T^{(1)}} = R\frac{n^{(1)}}{V^{(1)}} ,$$

$$\frac{1}{T^{(2)}} = \frac{5}{2}R\frac{n^{(2)}}{U^{(2)}} , \qquad \frac{P^{(2)}}{T^{(2)}} = R\frac{n^{(2)}}{V^{(2)}} ,$$

donde $R = 1,986$ cal/mol K. El número de moles del primer sistema es $n^{(1)} = 0{,}5$ y el del segundo es $n^{(2)} = 0{,}75$. Los dos sistemas están contenidos en un cilindro aislado, separados por un pistón diatérmico móvil. Las temperaturas iniciales son $T^{(1)} = 200$ K y $T^{(2)} = 300$ K, y el volumen total es 20 ℓ. ¿Cuáles son la energía y el volumen de cada sistema en equilibrio? ¿Cuáles la presión y la temperatura?

Problema 7: La ecuación fundamental de un sistema de dos componentes es

$$S = nA + nR\ln\left(\frac{U^{3/2}V}{n^{5/2}}\right) - n_1R\ln\left(\frac{n_1}{n}\right) - n_2R\ln\left(\frac{n_2}{n}\right)$$

donde $n \equiv n_1 + n_2$ y A es una constante arbitraria. Un cilindro rígido cerrado de volumen total 10 ℓ está dividido en dos cámaras de igual volumen por una membrana rígida diatérmica, permeable a la primera componente pero impermeable a la segunda. En una de las cámaras se introduce una muestra del sistema con parámetros originales $n_1^{(1)} = 0{,}5$, $n_2^{(1)} = 0{,}75$, $V^{(1)} = 5\ell$ y $T^{(1)} = 300$ K. En la segunda cámara se introduce una muestra con parámetros originales $n_1^{(2)} = 1$, $n_2^{(2)} = 0{,}5$, $V^{(2)} = 5\ \ell$ y $T^{(2)} = 250$ K. Luego de alcanzado el equilibrio, ¿cuáles son los valores de $n_1^{(1)}$, $n_1^{(2)}$, T, $P^{(1)}$ y $P^{(2)}$?

Problema 8: En la representación energía U es función de la entropía y los parámetros extensivos $\{X_j\}_1^r$, y se definen los parámetros intensivos como

$$T = \frac{\partial}{\partial S}U(S,\{X_j\}) \quad ; \quad P_k = \frac{\partial}{\partial X_k}U(S,\{X_j\})$$

En la representación entropía, S es función de la energía interna U y las variables extensivas X_j. Llamando $X_0 = U$, y definiendo los parámetros intensivos en esta formulación como

$$F_k = \frac{\partial S}{\partial X_k}$$

demuestre que:

$$F_0 = \frac{1}{T} , \quad F_k = \frac{-P_k}{T}$$