Interpolación y extrapolación

Ejercicio

Describir que hace ejemplo7.m

Interpolación

$$x \in \left[\min_{i=0,\ldots,n} x_i, \max_{i=0,\ldots,n} x_i \right]$$

Extrapolación

$$x \notin \left[\min_{i=0,\ldots,n} x_i, \max_{i=0,\ldots,n} x_i \right]$$

¿Hay diferencia entre interpolación y extrapolación?

ejemplo7.m muestra que aunque la interpolación sea buena la extrapolación no necesariamente lo es.

Interpolación y extrapolación

Ejercicio

Describir que hace ejemplo7.m

Interpolación

$$x \in \left[\min_{i=0,\dots,n} x_i, \max_{i=0,\dots,n} x_i \right]$$

Extrapolación

$$x \notin \left[\min_{i=0,\dots,n} x_i, \max_{i=0,\dots,n} x_i \right]$$

¿Hay diferencia entre interpolación y extrapolación?

ejemplo7.m muestra que aunque la interpolación sea buena la extrapolación no necesariamente lo es.

Interpolación y extrapolación

Ejercicio

Describir que hace ejemplo7.m

Interpolación

$$x \in \left[\min_{i=0,\ldots,n} x_i, \max_{i=0,\ldots,n} x_i \right]$$

Extrapolación

$$x \notin \left[\min_{i=0,\ldots,n} x_i, \max_{i=0,\ldots,n} x_i \right]$$

¿Hay diferencia entre interpolación y extrapolación?

ejemplo7.m muestra que aunque la interpolación sea buena la extrapolación no necesariamente lo es.

Interpolación y extrapolación

Ejercicio

Describir que hace ejemplo7.m

Interpolación

$$x \in \left[\min_{i=0,\dots,n} x_i, \max_{i=0,\dots,n} x_i \right]$$

Extrapolación

$$x \notin \left[\min_{i=0,\dots,n} x_i, \max_{i=0,\dots,n} x_i \right]$$

¿Hay diferencia entre interpolación y extrapolación?

ejemplo7.m muestra que aunque la interpolación sea buena la extrapolación no necesariamente lo es.

Errores y tiempos de ejecución

Interpolar la función $f(x) = x^k$ en el intervalo $[0{,}001, k]$ usando los puntos $[0{,}001\ (1:k)/k]$. Calcular el valor de $P_k(1)$. Graficar los valores obtenidos para $k = 1:200$. Analizar los resultados obtenidos.

Interpolar la función $f(x) = x^k$ en el intervalo $[0{,}001, k]$ usando los puntos $[0{,}001\ (1:k)/k]$. Calcular el valor de $P_k(0)$. Graficar los valores obtenidos para $k = 1:200$. Analizar los resultados obtenidos.

Interpolar la función $f(x) = x^k$ en el intervalo $[0{,}001, k]$ usando los puntos $[0{,}001\ (1:k)/k]$. Calcular el valor de $P_k(0{,}99)$. Graficar los valores obtenidos para $k = 1:200$. Analizar los resultados obtenidos.

Errores y tiempos de ejecución

Interpolar la función $f(x) = x^k$ en el intervalo $[0{,}001, k]$ usando los puntos $[0{,}001\ (1:k)/k]$. Calcular el valor de $P_k(1)$. Graficar los valores obtenidos para $k = 1:200$. Analizar los resultados obtenidos.

Interpolar la función $f(x) = x^k$ en el intervalo $[0{,}001, k]$ usando los puntos $[0{,}001\ (1:k)/k]$. Calcular el valor de $P_k(0)$. Graficar los valores obtenidos para $k = 1:200$. Analizar los resultados obtenidos.

Interpolar la función $f(x) = x^k$ en el intervalo $[0{,}001, k]$ usando los puntos $[0{,}001\ (1:k)/k]$. Calcular el valor de $P_k(0{,}99)$. Graficar los valores obtenidos para $k = 1:200$. Analizar los resultados obtenidos.

Errores y tiempos de ejecución

Interpolar la función $f(x) = x^k$ en el intervalo $[0{,}001, k]$ usando los puntos $[0{,}001\ (1:k)/k]$. Calcular el valor de $P_k(1)$. Graficar los valores obtenidos para $k = 1:200$. Analizar los resultados obtenidos.

Interpolar la función $f(x) = x^k$ en el intervalo $[0{,}001, k]$ usando los puntos $[0{,}001\ (1:k)/k]$. Calcular el valor de $P_k(0)$. Graficar los valores obtenidos para $k = 1:200$. Analizar los resultados obtenidos.

Interpolar la función $f(x) = x^k$ en el intervalo $[0{,}001, k]$ usando los puntos $[0{,}001\ (1:k)/k]$. Calcular el valor de $P_k(0{,}99)$. Graficar los valores obtenidos para $k = 1:200$. Analizar los resultados obtenidos.

Para los ejemplos anteriores graficar el tiempo de ejecución en función del grado del polinomio. Comparar con el número de operaciones realizadas.

Conclusión

Los ejemplos anteriores muestran que:

- Para grandes valores de n, tanto en los casos de interpolación como de extrapolación se producen grandes errores en la evaluación de la función.
- El tiempo de evaluación aumenta cuadráticamente en la dimensión del polinomio.

Como el polinomio interpolatorio es único estos hechos sólo se pueden deber al número de operaciones.

Para los ejemplos anteriores graficar el tiempo de ejecución en función del grado del polinomio. Comparar con el número de operaciones realizadas.

Conclusión

Los ejemplos anteriores muestran que:

- Para grandes valores de n, tanto en los casos de interpolación como de extrapolación se producen grandes errores en la evaluación de la función.
- El tiempo de evaluación aumenta cuadráticamente en la dimensión del polinomio.

Como el polinomio interpolatorio es único estos hechos sólo se pueden deber al número de operaciones.

Para los ejemplos anteriores graficar el tiempo de ejecución en función del grado del polinomio. Comparar con el número de operaciones realizadas.

Conclusión

Los ejemplos anteriores muestran que:

- Para grandes valores de n, tanto en los casos de interpolación como de extrapolación se producen grandes errores en la evaluación de la función.
- El tiempo de evaluación aumenta cuadráticamente en la dimensión del polinomio.

Como el polinomio interpolatorio es único estos hechos sólo se pueden deber al número de operaciones.

Para los ejemplos anteriores graficar el tiempo de ejecución en función del grado del polinomio. Comparar con el número de operaciones realizadas.

Conclusión

Los ejemplos anteriores muestran que:

- Para grandes valores de n, tanto en los casos de interpolación como de extrapolación se producen grandes errores en la evaluación de la función.
- El tiempo de evaluación aumenta cuadráticamente en la dimensión del polinomio.

Como el polinomio interpolatorio es único estos hechos sólo se pueden deber al número de operaciones.

Para los ejemplos anteriores graficar el tiempo de ejecución en función del grado del polinomio. Comparar con el número de operaciones realizadas.

Conclusión

Los ejemplos anteriores muestran que:

- Para grandes valores de n, tanto en los casos de interpolación como de extrapolación se producen grandes errores en la evaluación de la función.
- El tiempo de evaluación aumenta cuadráticamente en la dimensión del polinomio.

Como el polinomio interpolatorio es único estos hechos sólo se pueden deber al número de operaciones.

Polinomio interpolatorio de Newton

Sean $P_{k-1}(x)$ y $P_k(x)$ los polinomios de grado a lo sumo $k-1$ y k que interpolan a $f(x)$ en los puntos $x_0,\dots,x_{k-1}$ y $x_0,\dots,x_k$ respectivamente.

¿Qué le falta a $P_{k-1}(x)$ para se $P_k(x)$?

$P_k(x)-P_{k-1}(x)$ polinomio de grado a lo sumo k tal que para todo $i=0,\cdots,k-1$:

$$P_k(x_i)-P_{k-1}(x_i)=0$$

$$P_k(x)-P_{k-1}(x)=C_k*Q_k(x)$$

$$Q_k(x)=\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)$$

Polinomio interpolatorio de Newton

Sean $P_{k-1}(x)$ y $P_k(x)$ los polinomios de grado a lo sumo $k-1$ y k que interpolan a $f(x)$ en los puntos $x_0,\ldots,x_{k-1}$ y $x_0,\ldots,x_k$ respectivamente.

¿Qué le falta a $P_{k-1}(x)$ para se $P_k(x)$?

$P_k(x)-P_{k-1}(x)$ polinomio de grado a lo sumo k tal que para todo $i=0,\cdots,k-1$:

$$P_k(x_i)-P_{k-1}(x_i)=0$$

$$P_k(x)-P_{k-1}(x)=C_k * Q_k(x)$$

$$Q_k(x)=\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)$$

Polinomio interpolatorio de Newton

Sean $P_{k-1}(x)$ y $P_k(x)$ los polinomios de grado a lo sumo $k-1$ y k que interpolan a $f(x)$ en los puntos $x_0,\ldots,x_{k-1}$ y $x_0,\ldots,x_k$ respectivamente.

¿Qué le falta a $P_{k-1}(x)$ para se $P_k(x)$?

$P_k(x) - P_{k-1}(x)$ polinomio de grado a lo sumo k tal que para todo $i = 0,\cdots,k-1$:

$$P_k(x_i) - P_{k-1}(x_i) = 0$$

$$P_k(x) - P_{k-1}(x) = C_k * Q_k(x)$$

$$Q_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j)$$

Polinomio interpolatorio de Newton

Sean $P_{k-1}(x)$ y $P_k(x)$ los polinomios de grado a lo sumo $k-1$ y k que interpolan a $f(x)$ en los puntos $x_0,\ldots,x_{k-1}$ y $x_0,\ldots,x_k$ respectivamente.

¿Qué le falta a $P_{k-1}(x)$ para se $P_k(x)$?

$P_k(x)-P_{k-1}(x)$ polinomio de grado a lo sumo k tal que para todo $i=0,\cdots,k-1$:

$$P_k(x_i)-P_{k-1}(x_i)=0$$

$$P_k(x)-P_{k-1}(x)=C_k * Q_k(x)$$

$$Q_k(x)=\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)$$

$i = 0, \ldots, k-1$

$$P_k(x_i) = P_{k-1}(x_i) + C_k * Q_k(x_i) = P_{k-1}(x_i) = f_i$$

x_k

$$f_k = P_k(x_k) = P_{k-1}(x_k) + C_k * Q_k(x_k) = P_{k-1}(x_k) + C_k \prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j)$$

luego

$$C_k = \frac{f_k - P_{k-1}(x_k)}{\prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j)}.$$

$i = 0, \ldots, k-1$

$$P_k(x_i) = P_{k-1}(x_i) + C_k * Q_k(x_i) = P_{k-1}(x_i) = f_i$$

x_k

$$f_k = P_k(x_k) = P_{k-1}(x_k) + C_k * Q_k(x_k) = P_{k-1}(x_k) + C_k \prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j)$$

luego

$$C_k = \frac{f_k - P_{k-1}(x_k)}{\prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j)}.$$

$i = 0, \ldots, k-1$

$$P_k(x_i) = P_{k-1}(x_i) + C_k * Q_k(x_i) = P_{k-1}(x_i) = f_i$$

x_k

$$f_k = P_k(x_k) = P_{k-1}(x_k) + C_k * Q_k(x_k) = P_{k-1}(x_k) + C_k \prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j)$$

luego

$$C_k = \frac{f_k - P_{k-1}(x_k)}{\prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j)}.$$

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + \frac{f_k - P_{k-1}(x_k)}{\prod_{j=0}^{k-1}(x_k - x_j)} * Q_k(x)$$

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + \frac{f_k - P_{k-1}(x_k)}{Q_k(x_k)} * Q_k(x)$$

Diferencia dividida

Se denomina diferencia dividida de orden k de f en los puntos $x_0, \ldots, x_k$ al número:

$$C_k = \frac{f_k - P_{k-1}(x_k)}{Q_k(x_k)}$$

y se la denota por:

$$f[x_0, \ldots, x_k].$$

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + \frac{f_k - P_{k-1}(x_k)}{\prod_{j=0}^{k-1}(x_k - x_j)} * Q_k(x)$$

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + \frac{f_k - P_{k-1}(x_k)}{Q_k(x_k)} * Q_k(x)$$

Diferencia dividida

Se denomina diferencia dividida de orden k de f en los puntos $x_0, \ldots, x_k$ al número:

$$C_k = \frac{f_k - P_{k-1}(x_k)}{Q_k(x_k)}$$

y se la denota por:

$$f[x_0, \ldots, x_k].$$

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + \frac{f_k - P_{k-1}(x_k)}{\prod_{j=0}^{k-1}(x_k - x_j)} * Q_k(x)$$

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + \frac{f_k - P_{k-1}(x_k)}{Q_k(x_k)} * Q_k(x)$$

Diferencia dividida

Se denomina diferencia dividida de orden k de f en los puntos $x_0, \ldots, x_k$ al número:

$$C_k = \frac{f_k - P_{k-1}(x_k)}{Q_k(x_k)}$$

y se la denota por:

$$f[x_0, \ldots, x_k].$$

Para calcular $P_k(x)$ $k = 1, \ldots, n$ se necesita:

- $P_{k-1}(x)$
- f_k
- $Q_k(x)$

$P_0(x)$

Es el polinomio que interpola a la función en el punto x_0

$$P_0(x) = f_0$$

Para calcular $P_k(x)$ $k = 1, \ldots, n$ se necesita:

- $P_{k-1}(x)$
- f_k
- $Q_k(x)$

$P_0(x)$

Es el polinomio que interpola a la función en el punto x_0

$$P_0(x) = f_0$$

Para calcular $P_k(x)$ $k = 1, \ldots, n$ se necesita:

- $P_{k-1}(x)$
- f_k
- $Q_k(x)$

$P_0(x)$

Es el polinomio que interpola a la función en el punto x_0

$$P_0(x) = f_0$$

Para calcular $P_k(x)$ $k = 1, \ldots, n$ se necesita:

- $P_{k-1}(x)$
- f_k
- $Q_k(x)$

$P_0(x)$

Es el polinomio que interpola a la función en el punto x_0

$$P_0(x) = f_0$$

Para calcular $P_k(x)$ $k = 1, \dots, n$ se necesita:

- $P_{k-1}(x)$
- f_k
- $Q_k(x)$

$P_0(x)$

Es el polinomio que interpola a la función en el punto x_0

$$P_0(x) = f_0$$

$$P_0(x) = f_0$$

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= f_0 \\
P_1(x) &= f_0 + \frac{f_1 - P_0(x_1)}{Q_1(x_1)} Q_1(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= f_0 \\
P_1(x) &= f_0 + \frac{f_1 - P_0(x_1)}{Q_1(x_1)} Q_1(x) \\
P_2(x) &= f_0 + \frac{f_1 - P_0(x_1)}{Q_1(x_1)} Q_1(x) + \frac{f_2 - P_1(x_2)}{Q_2(x_2)} Q_2(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= f_0 \\
P_1(x) &= f_0 + \frac{f_1 - P_0(x_1)}{Q_1(x_1)} Q_1(x) \\
P_2(x) &= f_0 + \frac{f_1 - P_0(x_1)}{Q_1(x_1)} Q_1(x) + \frac{f_2 - P_1(x_2)}{Q_2(x_2)} Q_2(x) \\
P_3(x) &= f_0 + \frac{f_1 - P_0(x_1)}{Q_1(x_1)} Q_1(x) + \frac{f_2 - P_1(x_2)}{Q_2(x_2)} Q_2(x) + \frac{f_3 - P_2(x_3)}{Q_3(x_3)} Q_3(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= f_0 \\
P_1(x) &= f_0 + \frac{f_1 - P_0(x_1)}{Q_1(x_1)} Q_1(x) \\
P_2(x) &= f_0 + \frac{f_1 - P_0(x_1)}{Q_1(x_1)} Q_1(x) + \frac{f_2 - P_1(x_2)}{Q_2(x_2)} Q_2(x) \\
P_3(x) &= f_0 + \frac{f_1 - P_0(x_1)}{Q_1(x_1)} Q_1(x) + \frac{f_2 - P_1(x_2)}{Q_2(x_2)} Q_2(x) + \frac{f_3 - P_2(x_3)}{Q_3(x_3)} Q_3(x) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Ejemplo

x_i	f_i
1	1
2	4
3	9

Se busca

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)(x-2).$$

Ejemplo

x_i	f_i
1	1
2	4
3	9

Se busca

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)(x-2).$$

Procedimiento

$$P_0(x) \quad = \quad f(x_0) = \boxed{1}$$

Procedimiento

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= f(x_0) = \boxed{1} \\
P_1(x) &= 1 + \frac{f(x_1) - P_0(x_1)}{x_1 - x_0}(x - x_0)
\end{aligned}
$$

Procedimiento

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= f(x_0) = \boxed{1} \\
P_1(x) &= 1 + \frac{f(x_1) - P_0(x_1)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\
&= 1 + \frac{4-1}{2-1}(x-1)
\end{aligned}
$$

Procedimiento

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= f(x_0) = \boxed{1} \\
P_1(x) &= 1 + \frac{f(x_1) - P_0(x_1)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\
&= 1 + \frac{4-1}{2-1}(x-1) \\
&= \boxed{1} + \boxed{3}(x-1) = 3x - 2
\end{aligned}
$$

Procedimiento

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= f(x_0) = \boxed{1} \\
P_1(x) &= 1 + \frac{f(x_1) - P_0(x_1)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\
&= 1 + \frac{4-1}{2-1}(x-1) \\
&= \boxed{1} + \boxed{3}(x-1) = 3x - 2 \\
P_2(x) &= 1 + 3(x-1) + \frac{f(x_2) - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}(x - x_0)(x - x_1)
\end{aligned}
$$

Procedimiento

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= f(x_0) = \boxed{1} \\
P_1(x) &= 1 + \frac{f(x_1) - P_0(x_1)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\
&= 1 + \frac{4-1}{2-1}(x-1) \\
&= \boxed{1} + \boxed{3}(x-1) = 3x - 2 \\
P_2(x) &= 1 + 3(x-1) + \frac{f(x_2) - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}(x - x_0)(x - x_1) \\
&= 1 + 3(x-1) + \frac{9-7}{(3-1)(3-2)}(x-1)(x-2)
\end{aligned}
$$

Procedimiento

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= f(x_0) = \boxed{1} \\
P_1(x) &= 1 + \frac{f(x_1) - P_0(x_1)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\
&= 1 + \frac{4-1}{2-1}(x-1) \\
&= \boxed{1} + \boxed{3}(x-1) = 3x - 2 \\
P_2(x) &= 1 + 3(x-1) + \frac{f(x_2) - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}(x - x_0)(x - x_1) \\
&= 1 + 3(x-1) + \frac{9-7}{(3-1)(3-2)}(x-1)(x-2) \\
&= \boxed{1} + \boxed{3}(x-1) + \boxed{1}(x-1)(x-2)
\end{aligned}
$$

Procedimiento

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= f(x_0) = \boxed{1} \\
P_1(x) &= 1 + \frac{f(x_1) - P_0(x_1)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\
&= 1 + \frac{4-1}{2-1}(x-1) \\
&= \boxed{1} + \boxed{3}(x-1) = 3x - 2 \\
P_2(x) &= 1 + 3(x-1) + \frac{f(x_2) - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}(x - x_0)(x - x_1) \\
&= 1 + 3(x-1) + \frac{9-7}{(3-1)(3-2)}(x-1)(x-2) \\
&= \boxed{1} + \boxed{3}(x-1) + \boxed{1}(x-1)(x-2) \\
&= 3x - 2 + \left(x^2 - 3x + 2\right)
\end{aligned}
$$

Procedimiento

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= f(x_0) = \boxed{1} \\
P_1(x) &= 1 + \frac{f(x_1) - P_0(x_1)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\
&= 1 + \frac{4-1}{2-1}(x-1) \\
&= \boxed{1} + \boxed{3}(x-1) = 3x - 2 \\
P_2(x) &= 1 + 3(x-1) + \frac{f(x_2) - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}(x - x_0)(x - x_1) \\
&= 1 + 3(x-1) + \frac{9-7}{(3-1)(3-2)}(x-1)(x-2) \\
&= \boxed{1} + \boxed{3}(x-1) + \boxed{1}(x-1)(x-2) \\
&= 3x - 2 + \left(x^2 - 3x + 2\right) \\
&= x^2.
\end{aligned}
$$

Implementar el método de Newton.

$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} C_k Q_k(x)$

```
function pz=evalnewton(c,x,z)
k=columns(c);
pz=zeros(size(z));
for j=1:k
 wj=c(j)*ones(size(z));
 for i=1:j-1
  wj=wj.*(z-x(i));
 end
 pz=pz+wj;
end
end
```

Implementar el método de Newton.

$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} C_k Q_k(x)$

```
function pz=evalnewton(c,x,z)
k=columns(c);
pz=zeros(size(z));
for j=1:k
 wj=c(j)*ones(size(z));
 for i=1:j-1
  wj=wj.*(z-x(i));
 end
 pz=pz+wj;
end
end
```

Ejercicio

Usar **evalnewton.m** para resolver el ejemplo anterior.

Ejercicio

Contar las operaciones necesarias para evaluar un polinomio usando **evalnewton.m**.

Ejercicio

Elaborar un programa que calcule la direfencia dividida de orden k de f en los puntos $x_0, \ldots, x_k$ usando la fórmula

$$C_k = \frac{f_k - P_{k-1}(x_k)}{Q_k(x_k)}$$

Ejercicio

Usar **evalnewton.m** para resolver el ejemplo anterior.

Ejercicio

Contar las operaciones necesarias para evaluar un polinomio usando **evalnewton.m**.

Ejercicio

Elaborar un programa que calcule la direfencia dividida de orden k de f en los puntos $x_0, \ldots, x_k$ usando la fórmula

$$C_k = \frac{f_k - P_{k-1}(x_k)}{Q_k(x_k)}$$

Ejercicio

Usar **evalnewton.m** para resolver el ejemplo anterior.

Ejercicio

Contar las operaciones necesarias para evaluar un polinomio usando **evalnewton.m**.

Ejercicio

Elaborar un programa que calcule la direfencia dividida de orden k de f en los puntos $x_0, \ldots, x_k$ usando la fórmula

$$C_k = \frac{f_k - P_{k-1}(x_k)}{Q_k(x_k)}$$