

Física General II

Guía N°9: Detalle de sistemas

Año académico 2016

Problema 1:

Considerando a la entropía como función de las variables independientes T y V y recordando que dado que S es una función de estado; es decir, dS es un diferencial exacto, se tiene que

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V}.$$

- a) Demostrar entonces que a partir de la primera ley de la termodinámica, para cualquier sistema se cumple,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P, \quad (1)$$

independientemente de la ecuación de estado.

- b) Usar la ecuación (1) para mostrar que en el caso de un gas ideal, U es sólo función de T .

Problema 2:

Se denomina presión de vapor saturado o presión de vapor de una sustancia, a la presión de la fase gaseosa cuando está en equilibrio con la fase líquida. La humedad relativa es la presión parcial del vapor de agua en el aire, dividida por la presión de vapor saturado del agua a la misma temperatura y expresada como porcentaje. De esta manera, el aire está saturado cuando la humedad relativa es del 100 %.

- a) La presión de vapor del agua a 20°C es $2,34 \times 10^3$ Pa. Si la temperatura del aire es de 20°C y la humedad relativa del 60 %, determinar la presión parcial de vapor de agua en la atmósfera (esto es, la presión debida exclusivamente al vapor de agua).
- b) En las condiciones del ítem anterior, ¿qué masa de vapor de agua hay en 1 m³ de aire, suponiendo al vapor de agua como gas ideal? La masa molar del vapor de agua es 18 g/mol.

Problema 3:

Experimentalmente se observa que cuando coexisten dos fases de una sustancia, la presión P de vapor saturado depende sólo de la temperatura del sistema y no de su volumen, $P(T)$.

- a) Utilizando la ecuación (1), demostrar la ecuación de Clapeyron,

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\lambda}{T(v_2 - v_1)}, \quad (2)$$

donde v_2 y v_1 son los volúmenes molares de las fases gaseosa y líquida respectivamente (es decir los volúmenes por mol) y λ es el calor latente molar de vaporización de la sustancia.

Ayuda: Escribir la energía interna y el volumen del sistema según,

$$U = n_1 u_1 + n_2 u_2, \quad V = n_1 v_1 + n_2 v_2,$$

donde n_1 y n_2 son los números de moles de la sustancia en la fase líquida y gaseosa, respectivamente ($n = n_1 + n_2$). Luego, considerar una transformación isotérmica infinitesimal por la cual un número dn de moles pasa del estado líquido al gaseoso, y en consecuencia se producen las variaciones dV y dU en el volumen y en la energía total del sistema, respectivamente.

- b) Teniendo en cuenta que el volumen molar de la fase gaseosa es mucho mayor que el de la fase líquida bajo las mismas condiciones, mostrar que a partir de la ecuación (2) se cumple,

$$P = \text{cte} \exp\left(-\frac{\lambda}{RT}\right),$$

donde se ha supuesto la fase gaseosa como un gas ideal ($P v_2 = RT$).

Problema 4:

Calcular la velocidad media y la velocidad cuadrática media para los siguientes grupos de seis partículas:

- a) Las 6 tienen velocidad igual a 10 m/s;
- b) 3 de ellas tienen velocidad igual a 5 m/s y las restantes 3, velocidad igual a 10 m/s;
- c) 3 de ellas tienen velocidad igual a 10 m/s, mientras que las restantes están en reposo.

Problema 5:

La ley de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann expresa que la fracción de moléculas con velocidades en el intervalo $(v, v + dv)$ es $f(v) dv$, siendo

$$f(v) = C v^2 \exp\left(-\frac{m v^2}{2 k_B T}\right),$$

donde C es una constante.

- a) Calcular los puntos críticos de la función $f(v)$, calcular la posición del máximo, evaluar su valor máximo, estudiar su comportamiento asintótico para $v \rightarrow \infty$ y graficar esta función.

Utilizando la expresión,

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 k_B T}{m}},$$

correspondiente a la posición del máximo de la distribución, ésta puede re-escribirse según:

$$f(v) = D \frac{v^2}{v_0^3} \exp\left(-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2\right).$$

- b) Usando la condición de normalización, $\int_0^\infty f(v) dv = 1$, verificar que la constante $D = \frac{4}{\sqrt{\pi}}$.
- c) Calcular la velocidad media $\bar{v} = \int_0^\infty v f(v) dv$ y la velocidad cuadrática media $v_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{v^2}}$, donde $\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 f(v) dv$.
- d) Calcular, con el auxilio de una tabla de integrales, la fracción de moléculas cuyas celeridades están en el intervalo $(0, v_{\text{rms}})$ y la fracción de aquellas que están en el intervalo (v_{rms}, ∞) .
- e) Considerar dos gases distintos a igual temperatura; ¿cuál es la relación entre sus velocidades cuadráticas medias?

Ayuda: Para el cálculo de las integrales que involucran la función distribución de velocidades es útil el siguiente resultado

$$\int_0^\infty x^\alpha \exp(-x^2) dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right),$$

donde la función Gamma satisface las siguientes propiedades:

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z), \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Problema 6:

Considerando al aire como un gas ideal monoatómico de peso molecular dado por 29 uma (que coincide con el peso molecular medio del aire), calcular la velocidad cuadrática media, v_{rms} , de una 'molécula' de aire a 300 K. ¿Cuántos impactos moleculares recibe por segundo un centímetro cuadrado de una superficie expuesta al aire a presión atmosférica normal y 300 K?

Problema 7:

Considerar un gas de moléculas de oxígeno a $T = 300$ K.

- a) ¿Cuál es la energía cinética traslacional promedio de una molécula?
- b) ¿Cuál es la velocidad cuadrática media molecular?
- c) ¿Cuántas moléculas por unidad de volumen, que viajan a esa velocidad son necesarias para producir una presión promedio de 1 atm? Comparar este resultado con el número de moléculas de oxígeno por unidad de volumen, contenidas en un recipiente a presión atmosférica estándar. Explicar la diferencia.

Problema 8:

La ley de Dalton de las presiones parciales enuncia que la presión de una mezcla de gases es igual a la suma de las presiones parciales de cada uno de los gases de la mezcla por separado. Demostrar la ley de Dalton a partir de la teoría cinética de los gases.

Problema 9:

Un recipiente de 45 litros de capacidad, que tiene un pequeño orificio practicado en uno de sus laterales, contiene una mezcla inicialmente en partes iguales de gases de oxígeno molecular y helio con 10^{-3} moles de cada uno de ellos. Los gases escapan a través del orificio a una cámara exterior, de volumen a todo fin práctico infinito, en la que se ha practicado el vacío. Determinar la composición inicial del haz molecular cuando sale del recipiente, es decir, el cociente entre los números de moléculas de helio y de oxígeno que escapan por segundo. ¿Qué tamaño debería tener el orificio para que el tiempo de relajación (tiempo necesario para que la cantidad de gas se reduzca en $1/e$) del helio sea 20 minutos? El experimento se realiza a temperatura constante igual a 27°C .

Problema 10:

Un recipiente de volumen V , que tiene un pequeño orificio de área A practicado en uno de sus laterales, contiene n moles de gas diatómico. El gas escapa a través del orificio a un recipiente de igual volumen (V) en el que se ha practicado el vacío.

- a) Escribir las ecuaciones correspondientes al número de moléculas N_1 en el primer recipiente, inicialmente lleno, y N_2 en el segundo recipiente, inicialmente vacío.
- b) Proponer soluciones $N_1(t)$ y $N_2(t)$ para dichas ecuaciones. Discutir el comportamiento para tiempos suficientemente largos.

Problema 11:

Considerar un gas ideal bidimensional, de manera tal que la ecuación de estado correspondiente resulta $P = n k_B T$, donde P tiene unidades de fuerza por unidad de longitud y n número de moléculas por unidad de superficie. Usando el principio de equipartición de la energía, calcular:

- a) el calor específico molar a superficie constante de un gas monoatómico.
- b) el calor específico molar a superficie constante de un gas diatómico.
- c) el calor específico molar a presión constante de los gases mono y diatómicos.

Problema 12:

Los efectos de la dimensionalidad en los sistemas físicos es un tema de particular interés. A tal fin, reproducir los resultados de la teoría cinética de los gases, suponiendo que el gas está compuesto de discos rígidos de diámetro d y está confinado a un recinto bidimensional, de manera tal que el número de moléculas por unidad de superficie resulta n . En particular, calcular el camino libre medio de las moléculas de un gas ideal bidimensional.

Problema 13:

Inicialmente, se tiene un litro de un gas de fotones a una temperatura de 220°C . Se realiza un ciclo de Carnot, cuya temperatura fría es de 20°C y cuyo estado inicial de máxima presión es el indicado anteriormente. ¿Cuáles son los volúmenes que se deben usar para que en un ciclo se genere 1 joule? Haga un gráfico del ciclo de Carnot en un diagrama PV .

Problema 14:

Sea un gas de fotones (radiación térmica) que ocupa un volumen V a temperatura T . Denotando con C_V y C_P las capacidades caloríficas a volumen constante y a presión constante, respectivamente:

- a) Calcule $C_V(T, V)$.
- b) ¿Se puede calcular C_P ? ¿Por qué?
- c) ¿Cuál es el inconveniente en usar las expresiones generales para $C_P - C_V$?