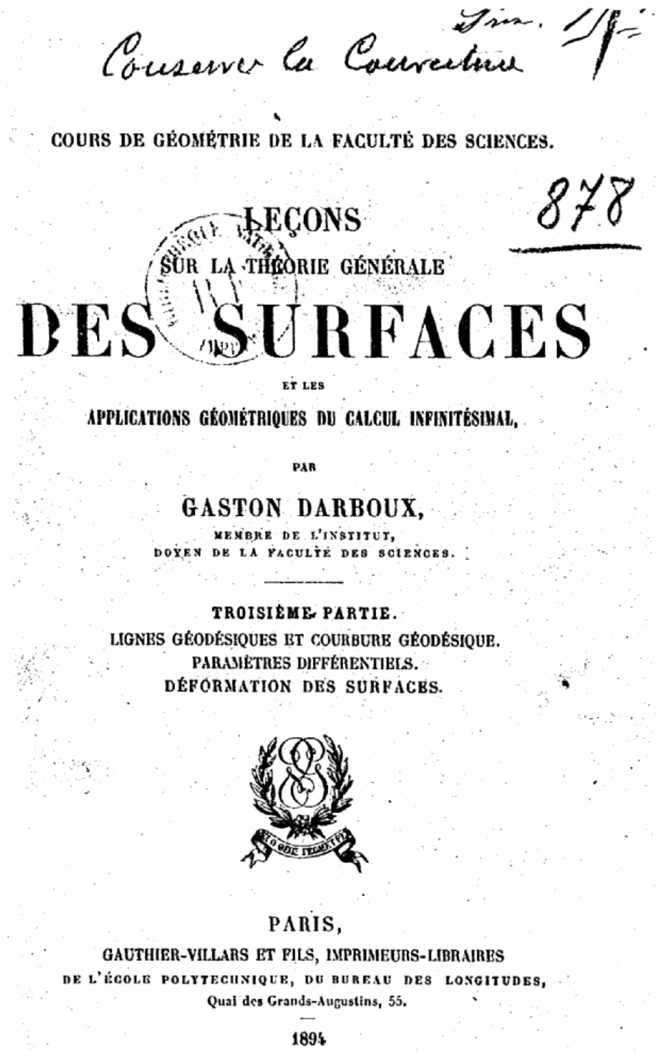
The problem of geodesic projection

Gaston Darboux (1842-1914)

« Il [Darboux] voulait écrire un livre sur un problème qui a joué un grand rôle dans le développement de la géométrie infinitésimale, celui des cartes géographiques. Tout à la fois, l'élégance et l'importance pratique de cette question célèbre le séduisaient. » [Picard 1917, 106]


Conserver la Couverture

COURS DE GÉOMÉTRIE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

878

LEÇONS
SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE
DES SURFACES
ET LES
APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INFINITÉSIMAL,

PAR

GASTON DARBOUX,
MEMBRE DE L'INSTITUT,
DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TROISIÈME PARTIE.
LIGNES GÉODÉSIQUES ET COURBURE GÉODÉSIQUE.
PARAMÈTRES DIFFÉRENTIELS.
DÉFORMATION DES SURFACES.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.
1894

« […] la théorie des cartes géographiques a vu naître bien des problèmes intéressants. […] En étudiant une propriété de la projection centrale, […] Beltrami a été conduit à s'écarter du point de vue qui, entre les mains de Lagrange et de Gauss, avait donné de résultats si parfaits, et à rechercher s'il est possible de faire une carte d'une surface donnée, assujettie à cette unique condition que les géodésiques de la surface soient représentées par les droites du plan. Son élégante analyse lui a montré que ce mode de représentation géodésique ne pouvaient intervenir que dans le cas des surfaces à courbure constante. [Darboux 1908, 116]

➢ The conformal projection

Carl Friederich Gauss (1877-1855)

- Gauss 1822: Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubildern dass die Abbildung dem Angebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird.

Joseph Liouville (1809-1882)

- Liouville 1850 : Du tracé géographique des surfaces les unes sur les autres

Pierre Ossian Bonnet (1819-1898)

- Bonnet 1852 : Sur la théorie mathématique des cartes géographiques

➢ The geodesic projection

Eugenio Beltrami (1877-1855)

- Beltrami 1866 : Risoluzione del Problema : Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette

Nicolas Auguste Tissot (1824-1908)

- Tissot 1878 : Sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques

Ulisse Dini (1845-1918)

- Dini 1869 : Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un’ altra

➢ Constant curvature surfaces and non-euclidean geometry

Bernhard Riemann (1826-1866)

- Riemann 1854 : Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen

Eugenio Beltrami (1877-1855)

- Beltrami 1868 : Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante
- Beltrami 1868 : Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea

« Das programm mit der Preisfrage Ihrer Societät ist mir noch nicht zu Gesichte gekommen. Mit Lindenau habe ich auch über eine Preisfrage conferirt, die in der neuen Zeitschrift mit dem Preisen von 100 Ducaten aufgegeben werden soll. Mir war eine interesante Aufgabe eingefallen, nämlich :

« allgemein eine gegebene Fläche so auf einer andern (gegebenen) zu projiciren (abzubilden), dass das Bild dem Original in den kleinsten Theilen ähnlich werde ».

Ein specieller Fall ist, wenn die erste Fläche eine Kugel, die zweite eine Ebene ist. Hier sind die stereographische und die merkatorische Projectionen particuläre Auflösungen. Man will aber die allgemeine Auflösung, worunter alle particulären begriffen sind, für jede Arten von Flächen. [Gauss, Lettre à Schumacher, 5 juillet 1816, *Werke* 8, 370]

➢ Gauss and his paper for Copenhague price

1) Let (t, u) et (T, U) the curvilinear coordinates of the two surfaces.

2) We have to project the first surface on the second one, so each point the first surface has to correspond (entsprechen) to a point the second one, and (T, U) are functions of (t, u).

3) First, we have to translate analytically the condition :« the projection must be similar in their smaller parts to the projected. ».

4) Gauss writes the « line elements » of the two surfaces :

$$\sqrt{(aa+bb+cc)dt^2+2(aa'+bb'+cc')dtdu+(a'a'+b'b'+c'c')du^2}$$

$$\sqrt{(AA+BB+CC)dT^2+2(AA'+BB'+CC')dtdu+(A'A'+B'B'+C'C')dT^2}$$

« Der analytische Ausdruck der Bedingung unserer Aufgabe ist demnach, dass

$$\frac{AA + BB + CC}{aa + bb + cc} = \frac{AA' + BB' + CC'}{aa' + bb' + cc'} = \frac{A'A' + B'B' + C'C'}{a'a' + b'b' + c'c'}$$

werden muss, welches ein endliche Function von t und u sein wird, die wir $= mm$ setzen wollen. » [Gauss 1822, 195]

« Dieses Verhältniss wird, allgemein zu reden, nach den Stellen verschieden sein : in dem speciellen Falle, wo m constant ist, wird ein vollkommene Aehnlichkeit auch in den endlichen Theilen, und wenn überdiess $m = 1$ ist, wird eine vollkommene Gleichheit Statt finden, und die eine Fläche sich auf die andere abwickeln lassen. » [Gauss 1822, 195]

- Three problems :

  - The general infinitesimal problem of conformal representation (solved by Gauss in 1822)

  - The local problem

  - The case $m = 1$ (solved by Gauss in 1828, using the notions of geodesics and curvature)

« Étant données deux surfaces, on peut toujours, et cela d’une infinité de manières, faire correspondre chaque point de l’une à un point de l’autre, de façon qu’à toute figure tracée sur la première réponde une figure tracée sur la seconde. Nous dirons que les deux surfaces peuvent se transformer l’une dans l’autre, si l’on peut faire en sorte que les arcs correspondants soient égaux : cette condition remplie, il s’ensuit que les aires et les angles correspondants sont aussi égaux, comme on le voit par la décomposition des surfaces en triangles infiniment petits.

Cela posé, le théorème énoncé par M. Gauss est le suivant :

Si deux surfaces peuvent être transformées l’une dans l’autre, le produit des rayons de courbure principaux en chaque point de l’une est égal au produit de ces mêmes rayons au point correspondant de l’autre. [Puiseux, cité dans Liouville 1850, 585]

➢ Solving of the problem :

To write the metric of the first surface

$$\omega = (aa + bb + cc)dt^2 + 2(aa' + bb' + cc')dtdu \\ + (a'a' + b'b' + c'c')du^2$$

on the form :

$$\omega = n(dp^2 + dq^2).$$

Same with thoseof the second

$$\Omega = N(dP^2 + dQ^2).$$

Then, we can write the problem :

$$\frac{(dP + idQ)(dP - idQ)}{(dp + idq)(dp - idq)} = \frac{mmn}{N}$$

Conclusions :

« Man sieht aber leicht, dass der Zähler im ersten Theile dieser Gleichung durch den Nenner nur dann theilbar sein kann, wenn entweder $dP + idQ$ durch $dp + idq$, und $dP - idQ$ durch $dp - idq$, der $dP + idQ$ durch $dp - idq$, und $dP - idQ$ durch $dp + idq$ theilbar ist. » [Gauss 1822, 197]

Therefore :

a) $\begin{matrix} P + iQ = f(p + iq) \\ P - iQ = f(p - iq) \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} P + iQ = f'(p - iq) \\ P - iQ = f'(p + iq) \end{matrix}$

with f' the conjugate function of f.

➢ Some examples dealed by Gauss :

- The two surfaces are some parts of a plane
- The projection of right cone on a plane
- The projection of a sphere on a plane
- The projection of an ellipsoïd of revolution on a plane
- The projection of a triaxial ellipsoïd on a sphere

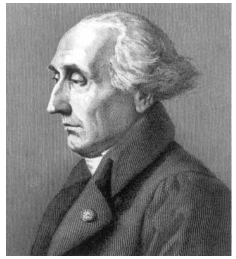
- Liouville – Du tracé géographique des surfaces les unes sur les autres – 1850

« Deux surfaces A et A' étant données, on demande faire correspondre les points $m, m_1, m_2, m_3, \ldots$ de la surface A aux points $m', m'_1, m'_2, m'_3, \ldots$ de la surface A', de telle manière que deux figures correspondantes quelconques sur ces deux surfaces soient toujours semblables l'une à l'autre dans leurs éléments infiniment petits. En d'autres termes, on demande que tout triangle infinitésimal, tracé sur la première surface, soit semblable au triangle infinitésimal correspondant sur l'autre surface. »

Joseph Liouville
(1809-1882)

« Cette condition est celle que Lambert, Lagrange et M. Gauss ont adoptée comme principe fondamental dans leur théorie des cartes géographiques : et voilà pourquoi nous dirons que chaque figure $mm_1m_2m_3$ ... ou $m'm'_1m'_2m'_3$ ... est, sur la surface où elle est située, le tracé géographique de la figure correspondante sur l'autre surface. » [Liouville 1850, 601]

Johann Lambert (1728-1777)



Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

Carl Friederich Gauss (1777-1855)

➢ Liouville's solution

« Peu de mots nous suffiront en effet pour montrer que quand on a réussi à trouver, pour la surface A, des variables α, βqui donnent

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

et pour la surface A', des variables α', β'

$$ds'^2 = \lambda'(d\alpha'^2 + d\beta'^2),$$

le problème du tracé géographique de ces deux surfaces l'une sur l'autre se résout de suite dans toute sa généralité. [Liouville 1852, 601-602]

« […] on conclura, […], que

$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1} = \Pi\left(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}\right)$$

Π désignant une fonction arbitraire. Ainsi le problème du tracé géographique se résoudra pour nos deux surfaces A et A' en prenant, pour α', la partie réelle de $\Pi\left(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}\right)$, et pour β' le coefficient de racine $\sqrt{-1}$, dans cette même expression, réduite à la forme $P + Q\sqrt{-1}$. […] A cause du double signe contenu dans $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, on voit que les tracés géographiques sont en quelque sorte conjugués deux à deux. Cela répond sur la sphère, par exemple, aux deux figures symétriques l'une de l'autre qui sont toujours coexistantes. [Liouville 1850, 602-603]

- A new approach of Gauss's problem about the deformation of surfaces

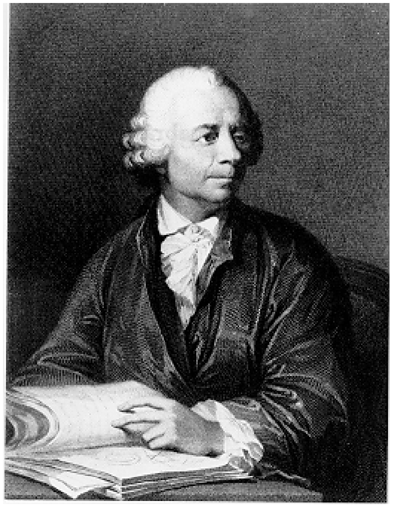
« On peut demander dans quel cas le module du tracé dont nous avons donné l'expression générale, reste constamment égal à 1. On a alors $ds = ds'$, et les deux surfaces A et A' peuvent être appliquées l'une sur l'autre dans celles de leurs parties correspondantes qu'on voudra, comme les surfaces développables s'appliquent sur le plan. » [Liouville 1850, 604]

- Extension of the question of the geographical layout

➢ Bonnet – Sur la théorie mathématique des cartes géographiques – 1852)

Johann-Heinrich Lambert
(1728-1777)

« Une carte géographique n’est autre chose qu’une représentation sur une surface déterminée, que l’on suppose ordinairement plane, de la surface de la terre ou de l’une de ses parties. […] Enfin, Lambert envisagea la théorie des cartes géographiques sous un point de vue général extrêmement important. Il remarqua que le plus grand degré de perfection d’une carte était de reproduire la figures des différentes parties de la carte, de manière qu’il y eût constamment similitude entre une partie quelconque de la terre et la partie correspondante de la carte ; mais cette condition étant généralement impossible à remplir, à moins de supposer à la surface de la carte une forme particulière, Lambert se proposa de déterminer les lignes des méridiens et des parallèles par la condition que la similitude eût lieu seulement entre les éléments infiniment petits. »



Leonhard Euler (1707-1783)

Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

« Sans doute, de cette manière, une portion finie de la terre était déformée, mais les angles faits sur la carte étaient toujours égaux aux angles correspondants sur la surface du globe […]. Lambert ne résolut pas d’une manière complète le problème général qu’il s’était posé ; après lui, plusieurs géomètres, Euler, Lagrange, s’occupèrent avec succès de la question, mais en supposant à la terre la forme d’une sphère ou tout au plus d’une surface de révolution ; ce fut M. Gauss qui, dans un Mémoire couronné par l’Académie de Copenhague, résolut, le premier, le problème dans toute sa généralité et sans faire aucune hypothèse sur la surface de la terre et sur celle de la carte. » [Bonnet 1852, 301-302]

➢ Simplification of the problem

By writing the metrics in the form :

$$\mu' d\alpha' d\beta' = n^2 \mu d\alpha d\beta$$

And by integration, we get :

$$\alpha' = F(\alpha), \qquad \beta' = F_1(\beta)$$
$$\alpha' = \Phi(\beta), \qquad \beta' = \Phi_1(\alpha)$$

So, if we write :

$$\alpha' = U' + V'\sqrt{-1}, \quad \beta' = U' - V'\sqrt{-1}$$
$$\alpha = U + V\sqrt{-1}, \qquad \beta = U - V\sqrt{-1},$$

« les deux solutions de notre problème deviendront

$$U' + V'\sqrt{-1} = F\left(U + V\sqrt{-1}\right) \quad \text{et} \quad U' + V'\sqrt{-1} = \Phi\left(U - V\sqrt{-1}\right)$$
$$U' - V'\sqrt{-1} = F_1\left(U + V\sqrt{-1}\right) \qquad\quad U' - V'\sqrt{-1} = \Phi_1\left(U + V\sqrt{-1}\right).$$

Or, U' et V' devant être réels comme U et V, les deux fonctions F_1 et Φ_1 ne peuvent pas être prises arbitrairement, une fois que les fonctions F et Φ ont été fixées. Il faut évidemment, si la fonction F est réelle, que F_1 soit la même fonction ; et si F est une fonction imaginaire, que F_1 soit la fonction imaginaire conjuguée obtenue en changeant $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$ dans la première ; il en est de même de la fonction Φ_1 à l'égard de la fonction Φ. Ainsi chacune de nos solutions ne contient qu'une fonction arbitraire, qui peut toutefois être imaginaire aussi bien que réelle. » [Bonnet 1852, 307-308]

- A commentary about why we get the two solutions

« Nous avons obtenu deux solutions pour notre problème. Ces deux solutions conviennent toutes les deux, mais elles se distinguent l’une de l’autre en ce que l’une correspond à une similitude directe entre les éléments superficiels des deux surfaces, et l’autre à une similitude inverse. » [Bonnet 1852, 308]

➢ Applications

« Arrivons maintenant aux applications. » [Bonnet 1852, 314]

« […] on voit que le problème de Lambert, considéré dans toute sa généralité, n'offre d'autres difficultés que celles de mettre les carrés des éléments de la surface de la terre et de celle de la carte, sous la forme

$$ds^2 = M(dU^2 + dV^2), \quad ds'^2 = M(dU'^2 + dV'^2)$$

ou, ce qui revient au même, de trouver pour ces deux surfaces deux systèmes de lignes orthogonales les divisant en carrés infiniment petits.

Or on connaît de semblables lignes dans les surfaces développables, les surfaces de révolution, les surfaces du second ordre, les surfaces peu différentes d'une sphère ; […] nous supposerons donc immédiatement, comme on le fait toujours en géographie, que la terre soit une surface de révolution et que la surface de la carte soit un plan. » [Bonnet 1852, 315]

➢ The conformal representation of a surface of revolution on a plane : the general solution

« […] on voit que le premier méridien peut être représenté par une courbe quelconque, et que la latitude peut varier sur ce méridien suivant une loi aussi quelconque. [Bonnet 1852, 320]

This solution is matematically nice but not optimum pratically.

« Mais cette manière de déterminer les fonctions arbitraires, quoique la plus simple et la plus naturelle, n'est pas néanmoins celle qui convient le mieux à notre objet. En effet, il vaut mieux profiter de l'indétermination des deux fonctions qui entrent dans F et F_1, de manière à faire acquérir à la carte quelque nouvelle propriété qui rende sa construction facile ou son emploi commode. » [Bonnet 1852, 320]

➢ Can we simplify the problem ?

« Voyons d’abord s’il est possible d’obtenir un mode de représentation pour lequel une portion finie quelconque de la terre soit toujours semblable à la partie correspondante de la carte. Il faut, pour cela, évidemment que le rapport d’agrandissement […] soit constant. » [Bonnet 1852, 320-321]

- ## First idea

« Proposons nous, en second lieu, de déterminer les fonctions arbitraires par la condition qu'une série de points de la surface du globe occupent une position déterminée sur la surface de la carte. » [Bonnet 1852, 322]

- ## Second idea

« On pourrait aussi assujettir le rapport d'agrandissement *n* à avoir une même valeur déterminée pour une série de points du globe terrestre ; au moyen des formules d'interpolation, on trouverait encore aisément les fonctions arbitraires : mais toutes ces déterminations, qui ont d'ailleurs leur importance en géographie, n'offrent aucune difficulté. [Bonnet 1852, 323]

➢ A more difficult question

« Passons à une question beaucoup plus difficile et proposons nous, avec Lagrange, de déterminer les fonctions arbitraires de telle sorte qu'il en résulte pour les méridiens et pour les parallèles des courbes d'une nature donnée. Le problème posé ainsi, dans toute sa généralité, offre des difficultés peut-être insurmontables, nous nous bornerons à considérer le cas où les courbes données sont des cercles. Du reste, on peut remarquer que ce cas qui comprend les projections stéréographiques et les cartes marines, est suffisant pour les besoins de la géographie ; car il est naturel que dans la construction des cartes on préfère toujours le cercle à toute autre courbe, à cause de la facilité et de l'exactitude avec laquelle on peut le tracer. » [Bonnet 1852, 323]

➢ Beltrami’s justification of the problem

Most geometrical works about geographical maps are concerning maps which retains angles or ratio of area.

But a map are used for measuring some distances and it would be more useful to have a map so that geodesics are projected onto straight lines.

+

An historical reference to a problem set by Lagrange.

« Si l’œil est dans le centre du globe, la projection se nomme *centrale*, et elle a la propriété que tous les grands cercles se trouvent représentés par des lignes droites, mais les petits cercles le sont par des cercles ou par des ellipses suivant que leur plan est parallèle ou non au plan de projection. On se sert quelquefois de cette projection pour les mappemondes, et l’on y suppose ordinairement que le plan de projection est parallèle à l’équateur, moyennant quoi tous les cercles de latitude deviennent des cercles de mappemonde ; mais elle n’est guère usitée pour les Cartes particulières qui ne représentent qu’une partie de la surface de la Terre ; elle l’est davantage pour les Cartes célestes. »

« Et c’est, en général à cette projection que se réduit toute la gnomonique, les lignes horaires d’un cadran quelconque n’étant autre chose que les projections centrales des cercles horaires de la sphère. Au reste, des Cartes géographiques construites d’après cette projection auraient le grand avantage que tous les lieux de la Terre qui sont situés dans un même grand cercle du globe se trouveraient placés en ligne droite dans la Carte, en sorte que, pour avoir le plus court chemin d’un lieu de la Terre à l’autre, il n’y aurait qu’à joindre ces deux lieux dans la Carte par une ligne droite. »

[Lagrange 1779, cité par Darboux, *Leçons* 3, 41]

« Les remarques précédentes ont donc conduit M. Beltrami à se poser le problème suivant :

Étant donnée une surface, peut-on la représenter sur le plan de telle manière que les lignes géodésiques de la surface correspondent aux différentes droites du plan ? » [Darboux, *Leçons* 3, 41]

Analytical translation

Can the general equation of geodesics be written in the form

$$a\theta + b\nu + c = 0,$$

a, b, c désignant des constantes arbitraires et θ, ν des fonctions des coordonnées curvilignes λ, μ ?

Beltrami identifies the coefficients of the two equations of the geodesics end gets four equations :

$$E\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)-\frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u}=0$$

$$E\frac{\partial G}{\partial u}+F\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)-F\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u}=0$$

$$G\frac{\partial E}{\partial v}+F\left(\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)-F\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v}=0$$

$$G\left(\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)-\frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v}=0$$

Therefore :

$$E = \frac{R^2(v^2 + a^2)}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}$$

$$F = \frac{-R^2uv}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}$$

$$G = \frac{R^2(u^2 + a^2)}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}$$

« Dunque le nostre superficie sono quelle di curvatura costante. » [Beltrami 1866, 198]

« Le sole superficie suscettibili di essere rappresentate sopra un piano in modo che ad ogni punto corrisponda un punto ed ad ogni linea geodetica una linea retta sono quelle la cui curvatura è dovunque costante (positiva, negativa o nulla). Quando questa curvatura costante è nulla, la legge di corrispondenza non differisce dall'ordinaria omografia. Quando non è nulla, questa legge è riducibile alla projezione centrale nella sfera ed alle sue transformazioni omografiche. » [Beltrami 1866, 203]

Beltrami concludes with a generalization of his problem :

« Riportare i punti di una superficie sopra un’ altra superficie in modo che alle linee geodetiche della prima corrispondano linee geodetiche della seconda. » [Beltrami 1866, 204]

Following Beltrami, we cannot generalize his demonstration (as it is the case when we generalize from the infinitesimal case of the conservation of angles to the finite case of conservation of aires).

The lone generalization which can be possible is the following :

Affinchè i punti di una superficie possano essere riportari sopra una superficie di curvatura costante, in modo che le linee geodetiche di quella sieno rappresentate da linee geodetiche di questa, è necessario e sufficiente che anche la prima superficie abbia la curvatura costante.

Beltrami, Eugenio

[1866] Risoluzione del Problema : Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette, *Annali di matematica pura ed applicata*, (1) 7 (1866), 185-204.

[1868a] Sulla teoria delle linee geodetiche, *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo*, (2) 1 (1868), 708-718.

[1868b] Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea, *Giornale di matematiche*, 6 (1868), 284-312 ; trad. fr., J. Hoüel, Essai d'interprétation de la géométrie non-euclidienne, *Annales de l'école normale supérieure*, 6 (1869), 251-288.

[1868c] Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante, *Annali di Matematica pura ed applicata*, (2) 2 (1868-69), 232-255 ; trad. fr. J. Hoüel,Théorie fondamentale des espaces de courbure constante, *Annales de l'école normale supérieure*, 6 (1869), 346-375.

Bonnet, Ossian

[1852] Sur la théorie mathématique des cartes géographiques, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 17 (1852), 301-340.

[1865] Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée (première partie), *Journal de l'école impériale polytechnique*, (2) 24 (1865), 209-230.

[1867] Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée (deuxième partie), *Journal de l'école impériale polytechnique*, (2) 25 (1867), 209-230.

Darboux, Gaston

[Leçons] *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 4 tomes, 1ère éd., Paris : Gauthier-Villars, 1887-1896 ; 2e éd. des tomes 1et 2, 1914-1915.

[1908] Les origines, les méthodes et les problèmes de la géométrie infinitésimale, in *Atti del IV congresso internazionale dei matematici*, Vol. 1, Roma : Academia dei Lincei, 1909.

Dienger, J.

[1852] Du tracé géographique des surfaces courbes les unes sur les autres, et application de ce tracé à la construction des cartes géographiques, *Les nouvelles annales de Mathématiques*, 11 (1852), 252-268.

Dini, Ulisse

[1869] Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un' altra, *Annali di matematica pura ed applicata,* (1869),269-.

Dombrowski, Peter

[1979]	150 Years After Gauss' « disquisitiones generales circa superficies curvas », *Astérisque* 62 (1979).

Gauss, Carl Friederich

[Werke]	*Carl Friederich Gauss Werke*, 12 volumes, Leipzig/Berlin : Teubner, 1863-1933.

[1816]	Lettre de Gauss à Schumacher, 5 juillet 1816, *Werke* 8 (1900), 370-372.

[1822]	Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubildern dass die Abbildung dem Angebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird, *Astronomische Abhandlungen*, 3 (1825) ; *Werke* 4 (1873), 189-216.

[1825]	Neue allgemeine Untersuchungen über die krummen Flächen, *Werke* 8 (1900), 408-449.

[1828]	Disquisitiones generales circa superficies curvas, *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores*, 6 (1828), 99-146 ; *Werke* 4, 217-258 ; trad. fr. E. Roger, Grenoble, 1855, Recherche générales sur les surfaces courbes ; trad. fr. T. Abadie, *Nouvelles annales de mathématiques*, 11 (1852), 195-252 ; trad. angl. 1902 rééditée dans [Dombrowski 1979], 1-81.

Korkine, A.

[1890]	Sur les cartes géographiques, *Mathematische Annalen*, 35 (1890), 588-604.

Lagrange,

[1779] Sur la construction des cartes géographiques, *Nouveaux mémoires de l'académie de Berlin*, 1779 ; *Œuvres* 4, 638.

Liouville, J.

[1850] Notes, dans G. Monge, *Application de l'analyse à la géométrie*, 5e éd. revue, corrigée et annotée par M. Liouville, Paris, 1850, 547-638.

Picard, Emile

[1917] Notice biographique de G. Darboux, *Comptes rendus*, (1917) ; réédité dans [Picard 1917], 75-106.

[1922] *Discours et mélanges*, Paris : Gauthier-Villars, 1922.

Riemann, Bernhard

[Werke] Gesammelte mathematische Werke, Wissenschatlicher Nachlass und Nachträge, Springer Verlag (Berlin)-Teunber (Leipzig), 1990.

[1854] Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, *Abhandlungen der Königlischen Gesellschaft der Wissenschaft zu Göttingen*, 13 (1867) ; Werke 304-319 ; trad. fr. J. Houël in *Œuvres mathématiques de Riemann*, Paris : Gauthier-Villars, 1898.

Stäckel,

[1922] Gauss als Geometer, *Gauss Werke* 10.2, 1-123.

Stillwell, John

[1992] Geometry of Surfaces, New York : Springer Verlag, 1992.

Tissot, A.

[1878] Sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques, *Nouvelles annales de mathématiques*, (2) 17 (1878), 49-55, 145-163, 351-366.

[] Sur les cartes géographiques, Comptes rendus, 49 (), 673-676.