ÁLGEBRA III - Práctico 1

1. Hallar el cociente y el resto que se obtienen al dividir f por g en cada uno de los siguientes casos:
   a) $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5x + 1, \qquad g(x) = 2x^2 + 6x + 8;$
   b) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \qquad g(x) = x - 1.$

2. Sea $f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x^j \in \mathbb{R}[x]$. Probar que si $z \in \mathbb{C}$ es una raíz de f entonces $\overline{z}$, el conjugado de z, también es raíz de f.
   Ayuda: Recordar que en $\mathbb{C}$ se cumplen $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$ y $\overline{0} = 0$.

3. Sea $\mathbb{Q}$ el cuerpo de los números racionales. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{Q}[x]$ son ideales. Cuando el conjunto sea un ideal, encontrar su generador mónico.
   a) Todos los $f \in \mathbb{Q}[x]$ de grado par.
   b) Todos los $f \in \mathbb{Q}[x]$ de grado ≥ 5.
   c) Todos los $f \in \mathbb{Q}[x]$ tales que $f(0) = 0$.
   d) Todos los $f \in \mathbb{Q}[x]$ tales que $f(2) = f(4) = 0$.

4. Sea A una matriz $n \times n$ sobre el cuerpo F. Demostrar que el conjunto de todos los polinomios f en $F[x]$, tales que $f(A) = 0$ es un ideal en $F[x]$.

5. Encontrar el generador mónico del ideal $\{f \in \mathbb{C}[x] : f(A) = 0\}$, donde
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. Sea F un cuerpo. Demostrar que la intersección de cualquier número de ideales en $F[x]$ es un ideal.

7. Si f y g son polinomios sobre el cuerpo de los números complejos, entonces el m.c.d.$(f, g) = 1$ si, y sólo si, f y g no tienen raíces en común.

8. Si p es un polinomio irreducible y p divide a fg, demostrar que p divide a f o a g. Dar un ejemplo que muestre que esto es falso si p no es irreducible.

9. Sea A la matriz 2×2 sobre $\mathbb{C}$ dada por $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3i \end{bmatrix}$. Calcular $f(A)$ para los siguientes polinomios:
   a) $f(x) = x^2 - x + 2.$
   b) $f(x) = x^2 - 5x + 7.$