Elementos de Funciones Reales

Práctico 2
Integral de Riemann

Ejercicio 1

Sean P y Q dos particiones del intervalo $[a,b]$ tales que Q contiene a P ($P \subset Q$). Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ función acotada. Pruebe que:

a) $L(f,P) \leq L(f,Q)$

b) $U(f,Q) \leq U(f,P)$

Ejercicio 2

Considere la función $f(x) = x^2$ en [0,b].

a) Sea P una partición de $[0,b]$ en n subintervalos de igual longitud. Calcule las sumas inferiores y superiores de f con respecto a la partición P.

b) Determine si f es integrable sobre $[0,b]$ usando el criterio de integrabilidad y si lo fuera, calcule $\int_0^b x^2\, dx$

Ejercicio 3

Pruebe la ecuación $\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$ cualquiera sea la posición relativa de los números reales a, b y c. Asuma la integrabilidad de f siempre que sea necesario.

Ejercicio 4

a) ¿Qué funciones tienen la propiedad de que toda suma inferior es igual a toda suma superior?

b) a) ¿Qué funciones tienen la propiedad de que alguna suma inferior es igual a alguna suma superior?

Ejercicio 5

Decida cuáles de las siguientes funciones son integrables sobre [0,2] y calcule la integral cuando sea posible.

a)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x-2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = x + [x]$$

Ejercicio 6

a) Demuestre que si f es integrable sobre $[a,b]$ y $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

b) Demuestre que si f y g son funciones integrables sobre $[a,b]$ y $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

Ejercicio 7

a) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ función acotada. Pruebe que si para cada $c \in [a,b)$, f es integrable sobre $[a,c]$, entonces f es integrable sobre $[a,b]$.

b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ función acotada. Pruebe que si para cada $a < c < d < b$, f es integrable sobre $[c,d]$, entonces f es integrable sobre $[a,b]$.

c) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ función acotada y con un número finito de discontinuidades. Pruebe que f es integrable sobre $[a,b]$.

Ejercicio 8

Sea f función no decreciente sobre $[a,b]$. (Observe que f es acotada sobre $[a,b]$, ya que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ para todo $x \in [a,b]$).

a) Sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ una partición de $[a,b]$ tal que $t_i - t_{i-1} = \delta$, $\forall i = 1, ...n$. Demuestre que $U(f,P) - L(f,P) = \delta(f(b) - f(a))$.

b)Pruebe que f es integrable sobre $[a,b]$.

c) Proporcione un ejemplo de una función no decreciente en el intervalo $[0,1]$ (y por lo tanto integrable en $[0,1]$) que sea discontinua en un número infinito de puntos.

Ejercicio 9

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

a) Calcule $L(f,P)$ para toda partición P de $[0,1]$.

b) Calcule $inf\{U(f,P) : P \text{ es partición de } [0,1]\}$.

c) ¿Es f integrable en $[0,1]$?

Ejercicio 10

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ es fracción irreducible} \end{cases}$$

a) Pruebe que f es integrable sobre $[0,1]$ y que $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

b) Pruebe que f es continua sobre todos los irracionales de $[0,1]$ y discontinua en todos los racionales de $[0,1]$

Ayuda: Dado $\epsilon > 0$, el conjunto $F = \{x \in [0,1] : f(x) \geq \epsilon\}$ es finito.