Elementos de Funciones Reales

Práctico 4
Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

Ejercicio 1

a) Sea $A \subset \mathbb{R}$ tal que $m^*(A) < \infty$, entonces ¿Es A acotado?

b) Sea $A \subset \mathbb{R}$ tal que $m^*(A) = 0$, entonces ¿Es A acotado?

Ejercicio 2

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$

a) Demuestre que dado $\epsilon > 0$, existe O conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, tal que $A \subset O$ y $m^*(O) \leq m^*(A) + \epsilon$.

b) Demuestre que existe un conjunto G que es intersección de abiertos de $\mathbb{R}^n$ tal que $A \subset G$ y $m^*(A) = m^*(G)$.

Ejercicio 3

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$, abierto. ¿Se cumple que $m^*(\bar{U}) = m^*(U)$?

Ejercicio 4

Demuestre que $m^*(K) = 0$, siendo K el conjunto triádico de Cantor.

Ejercicio 5

Demuestre que para cada $h \in \mathbb{R}^n$ y para cada $A \subset \mathbb{R}^n$, se cumple que $m^*(A + h) = m^*(A)$.

Ejercicio 6

Demuestre que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ y para cada $A \subset \mathbb{R}^n$, se cumple que $m^*(\lambda A) = |\lambda|^n m^*(A)$.

Ejercicio 7

Dado un conjunto E, demuestre que la clase $\mathcal{A}$ de todos los subconjuntos $A \subset E$, tales que A o A^C es numerable, forma una $\sigma-$álgebra.

Ejercicio 8

Demuestre que los subconjuntos A de $\mathbb{R}^n$ tales que $m^*(A) = 0$ o $m^*(A^C) = 0$ forman una $\sigma-$álgebra.

Ejercicio 9

Sea $(\mathcal{A}, \mu)$ una medida sobre E. Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ tales que $\mu(A_1 \cap A_2) < \infty$. Demuestre que $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2)$.

Ejercicio 10

Sea $\mathcal{A}$ la $\sigma-$álgebra del ejercicio 7 con E no numerable.

a) Dado $A \in \mathcal{A}$, definimos $\mu_1(A) = 0$ si A es numerable y $\mu_1(A) = 1$, si A^C es numerable. Demuestre que μ_1 es una medida sobre $(E, \mathcal{A})$.

b) Dado $A \in \mathcal{A}$, definimos $\mu_\infty(A) = 0$ si A es numerable y $\mu_\infty(A) = \infty$, si A^C es numerable. Pruebe que μ_∞ es una medida sobre $(E, \mathcal{A})$.

Ejercicio 11

Sea E un conjunto. Para todo conjunto $A \subset E$, definimos $\nu(A) = n$, si A tiene un número finito n de elementos y $\nu(A) = \infty$ si A no es un conjunto finito. Demuestre que ν es una medida sobre $(E, \mathcal{P}(E))$.

Ejercicio 12

Sea $(\mathcal{A}, \mu)$ una medida sobre E. Para todo $X \subset E$ definimos

$$\mu^*(X) = \inf\{\mu(A) : A \in \mathcal{A} \text{ y } X \subset A\}$$

Demuestre que μ^* es una medida exterior y que $\mu^*(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Ejercicio 13

Demuestre que $M \subset \mathbb{R}^n$ es medible si y sólo si para todo $A \subset M$ y $B \subset M^C$ se cumple que $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

Ejercicio 14

Sea $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos medibles de E, disjuntos dos a dos. Demuestre que para cualquier $X \subset E$ se satisface

$$m^*(X \cap (\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(X \cup M_k)$$

Ejercicio 15

Dada una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $\overline{\mathbb{R}}$, definimos:

$$\underline{\lim}\ x_k = \sup_n\{\inf_{k\geq n}\{x_k\}\}$$

$$\overline{\lim}\ x_k = \inf_n\{\sup_{k\geq n}\{x_k\}\}$$

a) Demuestre que $\underline{\lim}\ x_k \leq \overline{\lim}\ x_k$.

b) Demuestre que $\underline{\lim}\ x_k = \overline{\lim}\ x_k$ si y sólo si existe $\lim_{k\to\infty} x_k$ en $\overline{\mathbb{R}}$. En ese caso, $\lim_{k\to\infty} x_k = \underline{\lim}\ x_k = \overline{\lim}\ x_k$.

Ejercicio 16

Dada una sucesión $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de un conjunto E, definimos:

$$\underline{\lim}\ M_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} M_k$$

$$\overline{\lim}\ M_k = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} M_k$$

Sea $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$.

a) Demuestre que $\underline{\lim}\ M_k$ es medible y que $m(\underline{\lim}\ M_k) \leq \underline{\lim}\ m(M_k)$.

b) Pruebe que $\overline{\lim}\ M_k$ es medible y que si $m(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k) < \infty$, entonces $\overline{\lim}\ m(M_k) \leq m(\overline{\lim}\ M_k)$.

c) Si $\underline{\lim}\ M_k = \overline{\lim}\ M_k$, diremos que existe $\lim_{k\to\infty} M_k$ y que $\lim_{k\to\infty} M_k = \underline{\lim}\ M_k = \overline{\lim}\ M_k$. Demuestre que si existe $\lim_{k\to\infty} M_k$, este conjunto es medible y que si $m(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k) < \infty$, entonces $m(\lim_{k\to\infty} M_k) = \lim_{k\to\infty} m(M_k)$.

Ejercicio 17

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$, medible; $h \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Demuestre que $M + h$ y λM son medibles.

b) Pruebe que $m(M+h) = m(M)$ (m es invariante por traslaciones)y que $m(\lambda M) = |\lambda|^n m(M)$.

Ejercicio 18

Demuestre que el conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + 1 \leq y^2\}$$

es medible.

Ejercicio 19

Demuestre que el conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x < y < z\}$$

es medible.

Ejercicio 20

Proporcione ejemplos de dos subconjuntos de $\mathbb{R}$, medibles E y F tales que:

a) F es cerrado, $m(F) > 0$, $m(F \cap [a, b]) < b - a$ para todo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, con $a < b$.

b) $0 < m(E \cap [a, b]) < b - a$ para todo $[a, b] \in \mathbb{R}$, con $a < b$.