Elementos de Funciones Reales

Práctico 5
Funciones Medibles

Ejercicio 1
Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Demuestre que $\{x \in E : f(x) \in \mathbb{R}\}$ es medible.

Ejercicio 2
Demuestre que $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$, $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$ y $\chi_{A^C} = 1 - \chi_A$.

Ejercicio 3
Sea $M \subset \mathbb{R}^n$. Demuestre que M es medible si y sólo si χ_M es medible.

Ejercicio 4

a) Sean M y M_0 conjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$, con $M_0 \subset M$. Sea $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Demuestre que f/M_0 (f restringida a M_0) es una función medible.

b) Sea $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos medibles y sea $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Demuestre que $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible si y sólo si f/M_n es medible para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 5
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona. Demuestre que f es medible.

Ejercicio 6
Demuestre que la función de Dirichlet es medible.

Ejercicio 7
Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Demuestre que:

a) Para todo abierto U de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ es medible.

b) Para todo B boreliano de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ es medible.

Ejercicio 8
Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Definimos:

$$||f||_\infty = \inf \Big\{ c \in [0, \infty] : m\{x \in E : |f(x)| > c\} = 0 \Big\}$$

a) Suponga que $||f||_\infty < \infty$. Demuestre que $m\{x \in E : |f(x)| > ||f||_\infty\} = 0$.

b) Demuestre que $||f||_\infty = 0$ si y sólo si $f = 0$ excepto sobre un conjunto de medida nula.

c) Sea $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Demuestre que $||f + g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$.

d) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que $||\lambda f||_\infty = |\lambda| ||f||_\infty$.

e) Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles ($f_k : E \to \overline{\mathbb{R}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$). Demuestre que $||f_k||_\infty \to 0$ si y sólo si $f_k \to 0$ uniformemente en el complemento de un conjunto de medida nula.

Ejercicio 9

Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles ($f_k : E \to \overline{\mathbb{R}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$). Demuestre que el conjunto de puntos de E en que la sucesión converge es medible.

Ejercicio 10

Sea $A \subset E$ un conjunto no medible. Sea $f = \chi_A - \chi_{A^C}$. Demuestre que f no es una función medible y que $|f|$ si lo es.