**Métodos Numéricos (2012)**

Guía de problemas Nº 4

**Problema 1:** Demostrar que si $f$ es un polinomio de grado menor o igual que $n$ entonces el polinomio de grado menor o igual que $n$ que interpola a $f$ en $x_0, x_1, ..., x_n$ es $f$.

**Problema 2:** Considere los siguientes conjuntos de datos

| $x$ | -1 | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | -1 | 3 | 11 | 27 |

y

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | -3 | 1 | 1 | 3 |

*a)* Calcular el polinomio interpolante $p(x)$ de grado menor o igual que 3, en la forma de Lagrange.

*b)* Construir las tablas de diferencias divididas y construir los polinomios interpolantes.

*c)* Agregar a las tablas el punto $x = 4$, $y = 1$ y actualizar las tablas de diferencias divididas para recalcular los polinomios interpolantes.

**Problema 3:** Un Spline lineal puede pensarse como una sucesión de polinomios interpolantes de grado 1, entre nodo y nodo, "empalmados" en forma contínua. Suponga que se particiona el intervalo $[1, 2]$ en $n$ subintervalos iguales de longitud $h = 1/n$, y que se fabrica el spline lineal usando como nodos a los extremos de los sub-intervalos así generados. ¿Cuál es el mínimo valor de $n$ que garantiza que la spline lineal aproxima a la función interpolada, $\sqrt{x}$, con siete decimales correctos?

**Problema 4:** Sea $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$, y $f(x) = 2^x$. Sea $P_n$ un poinomio de grado $n$ que interpola a $f$ en $n+1$ puntos distintos cualesquiera de dicho intervalo. Demostrar que para todo $x \in [0, 5]$,

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{32 \times 5^{n+1}}{(n+1)!}.$$

**Problema 5:** Calcular una aproximación de $f(2{,}5)$ interpolando los datos usando una spline cúbica natural que interpola los valores $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ f_1 = 0,\ f_2 = 3,\ f_3 = 4,\ f_4 = 4$.

**Problema 6:**

*a)* Determinar valores de $\alpha$, $\beta$, y $\gamma$ para que $S$ sea una función spline cúbica, siendo

$$S(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \gamma x, & 0 \leq x \leq 1, \\ -\alpha x^3 + \beta x^2 - 5\alpha x + 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

*b)* con los valores de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ del ítem anterior, decidir si $S$ interpola a la función $f(x) = 2^x + 0{,}5x^2 - 0{,}5x - 1{,}0$, $0 \leq x \leq 2$, respecto de la partición $\{0, 1, 2\}$.

*c)* Graficar simultáneamente $f$ y $S$ en el intervalo $[0, 2]$.