Métodos Numéricos (2012)

Guía de problemas Nº 5

Problema 1: Sea $\|\cdot\|$ una norma cualquiera sobre $\mathbb{R}^n$. Probar que

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\|, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

define una norma sobre $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Problema 2: Sea

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

a) Pruebe que $\|\cdot\|_\infty$ define una norma sobre $\mathbb{R}^n$ (llamada norma ℓ_∞).

b) Encuentre una expresión para la norma matricial subordinada a $\|\cdot\|_\infty$ en términos de las componentes de la matriz.

Problema 3: Recordando que una norma matricial subordinada satisface $\|I\| = 1$, y $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$, muestre que

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

define una norma sobre $\mathbb{R}^{n\times n}$, pero que esta norma no es subordinada a ninguna norma sobre $\mathbb{R}^n$.

Problema 4: Probar que los valores propios de una matriz triangular son los elementos de la diagonal.

Problema 5: Demuestre que si A es diagonalmente dominante, y Q se elige igual que en el método de Jacobi, entonces $\rho(I - Q^{-1}A) < 1$.

Problema 6: Demuestre que si $\rho(A) < 1$, entonces $I - A$ es invertible y $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$.

Problema 7: Escriba las tres componentes de las iteraciones de Jacobi y Gauss-Seidel para el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

¿Convergen estas iteraciones para cualquier vector inicial?

Problema 8: Demostrar las siguientes afirmaciones

a) El producto de dos matrices triangulares es triangular.

b) La inversa de una matriz triangular es triangular.

c) Si A y X son $n\times n$, A es definida positiva y X no singular, entonces $B = X^tAX$ es definida positiva.

Problema 9: Hallar la descomposición LU de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

mediante el algoritmo de Doolittle, sin pivoteo. Verifique el resultado ($LU = A$.)

Problema 10: Hallar la descomposición LU con eliminación Gaussiana con pivoteo de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ie. $PA = LU$. Mostrar L, U y la matriz de permutaciones P. Aplicar eso para resolver los sistemas $Ax = b$ para

$$b = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Problema 11: Sea

$$\begin{pmatrix} 16 & 4 & 8 & 4 \\ 4 & 10 & 8 & 4 \\ 8 & 8 & 12 & 10 \\ 4 & 4 & 10 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 26 \\ 38 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Resolver el sistema $Ax = b$ usando descomposición LU sin pivoteo.

Problema 12: Use el algoritmo de Cholesky para mostrar que la A del ejercicio anterior es definida positiva y resuelva el sistema $Ax = b$ usando la descomposición de Cholesky.

Problema 13:

a) Mostrar que para resolver un sistema triangular $n \times n$ se requieren aproximadamente n^2 operaciones.

b) Mostrar que el algoritmo de Cholesky requiere aproximadamente $n^3/3$ operaciones.

Problema 14: Sea A una matriz $n \times n$ definida positiva. ¿Cuántas matrices triangulares superiores R cumplen que $A = R^t R$?