Métodos Numéricos (2012)

Guía de problemas N$^{\text{o}}$ 8

Problema 1: *(Aproximación discreta de cuadrados mínimos).* Dada una grilla $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, se quiere encontrar la aproximación lineal, $p(x) = a_0 + a_1 x$, a la tabla de valores (x_i, y_i) $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ que minimice la norma ℓ_2 al cuadrado de la diferencia de la aproximación con los valores y_i dados; es decir que minimice

$$\sum_{i=0}^{n} (p(x_i) - y_i)^2. \tag{1}$$

Muestre que los coeficientes a_0 y a_1 que minimizan (1) satisfacen:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2},$$

$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

Problema 2: Sean $f, g \in C([-1, 1])$, y

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx.$$

a) Utilizando este producto interno y el procedimeinto de Gram-Schmidt, calcule los cuatro primeros polinomios ortonormales que se obtienen a partir del conjunto $\{1, x, x^2, x^3 \ldots\}$.

b) Calcule ahora los cuatro primeros polinomios, utilizando el mismo producto interno, con el procedimiento iterativo

$$p_n(x) = (x - a_n) p_{n-1}(x) - b_n p_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

donde $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x - a_1$, y

$$a_n = \frac{(x p_{n-1}, p_{n-1})}{(p_{n-1}, p_{n-1})},$$
$$b_n = \frac{(x p_{n-1}, p_{n-2})}{(p_{n-2}, p_{n-2})}.$$

Normalice los polinomios calculados en b) y compare con los obtenidos en a).

Problema 3: Usando el producto interno y los cuatro primeros polinomios del problema anterior, calcule la mejor aproximación a la función e^x en el intervalo $[-1, 1]$.

Problema 4: *(Polinomios de Chebyshev).* Obtenga los primeros polinomios de Chebyshev, mediante el procedimieto de Gram-Schmidt aplicado al conjunto $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$, usando el producto interno

$$\int_{-1}^{1} f(x) g(x) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$$

Sugerencia: Note que con el cambio de variable $x = \cos(\theta)$,

$$(f, g) = \int_{0}^{\pi} f(\cos(\theta)) g(\cos(\theta)) d\theta.$$