Métodos Numéricos Para Ecuaciones Diferenciales
–Guía 1–

Problema 1: Considere el Problema de Valor Inicial (PVI)

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \lambda y + P_n(t)\ e^{\mu t}, \\
y(0) &= y_0, \qquad \lambda, \mu, y_0 \in \mathbb{C},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

donde $P_n(t)$ es un polinomio de grado n con coeficientes complejos. Use el Principio de Duhamel para probar que la solución de (1) es de la forma

$$
y(t) = e^{\lambda t}\tilde{y}_0 + Q_m(t)e^{\mu t},
$$

donde $Q_m(t)$ es un polinomio de grado m con $m = n$ en el caso sin resonancia ($\mu \neq \lambda$) y $m = n+1$ en el caso con resonancia ($\mu = \lambda$). Determine $\tilde{y}_0$ en cada caso.

Problema 2: Considere el siguiente PVI

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \lambda y + e^{\lambda t}, \\
y(0) &= 0,
\end{aligned}
$$

y el problema con dato inicial perturbado

$$
\frac{d\tilde{y}}{dt} = \lambda \tilde{y} + e^{\lambda t}, \quad \tilde{y}(0) = \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.
$$

Estudie el comportamiento de la diferencia $w(t) = \tilde{y}(t) - y(t)$ para los tres casos $\operatorname{Re}\lambda < 0$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$, y $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Problema 3: Considere el PVI

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= f(y,t), \\
y(t_0) &= y_0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

donde $f(y,t)$ es suave.

(a) Mueste que si la solución $y(t)$ diverge en tiempo finito, entonces su derivada dy/dt también diverge al mismo tiempo.

(b) Muestre con un contraejemplo que la recíproca de la propiedad (a) es falsa.

(c) ¿Es posible que la solución $y(t)$ diverja en tiempo finito en el caso particular $f(y,t) = \sin(y)$?.

Problema 4: Considere el PVI

$$
\frac{dy}{dt} = \lambda y + F(t), \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 2,
$$

con $\lambda = -1$, $F(t) = \operatorname{sen}(2\pi t)$.

(a) Resuelva el problema analíticamente y discuta el comportamiento de la solución. Muestre la solución como un gráfico.

(*b*) Aplique el método explícito de Euler

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= (1+\lambda k)v_n + kF_n \\ v_0 &= y_0 \end{aligned}$$

para calcular la solución numéricamente. Utilizando una computadora haga corridas usando los siguientes pasos temporales

$$k = 0.1,\ 0.01,\ 0.001.$$

Para cada valor de k realice un gráfico de la solución numérica superpuesto con la solución exacta.

(*c*) Para cada una de las corridas calcule el error global $|v_n - y_n|$ de la solución numérica y realice un gráfico del mismo. ¿Decrece el máximo del error como usted espera cuando k decrece?

Problema 5: Considere el PVI

$$\frac{dy}{dt} = y + t^2, \qquad y(0) = 1. \tag{3}$$

(*a*) Encuentre la solución exacta $y(t)$.

(*b*) Escriba un programa de computadora que aplique el método de Euler para resolver (3) con $t \in [0, 2]$ para diferentes valores del paso temporal k. Para cada valor $k = 0.001$, 0.002, 0.003, $\dots$, 0.05 su programa debe calcular el máximo del error global

$$e(k) = \max_{0 \le t_n \le 2} |v(k, t_n) - y(t_n)|.$$

Grafique e vs. k y analize el gráfico para valores pequeños de k. ¿Existe una cota lineal para $e(k)$?, ¿existe una cota cuadrática para $e(k)$?

Problema 6: Sea $v(t, k)$ la aproximación de Euler, calculada conpaso temporal k, a la solución exacta $y(t)$ de un problema de valor inicial dado. Los cocientes de precisión $Q(t, k)$ y $\tilde{Q}(t, k)$ se definen como

$$Q(t,k) = \frac{v(t,k) - y(t)}{v(t,k/2) - y(t)}, \quad \text{y} \quad \tilde{Q}(t,k) = \frac{v(t,k) - v(t,k/2)}{v(t,k/2) - v(t,k/4)}. \tag{4}$$

(*a*) Muestre que si se aproxima el PVI (2) con un método de un paso estable, $Q(t, k) = 2^p(1 + \mathcal{O}(k))$, y $\tilde{Q}(t, k) = 2^p(1 + \mathcal{O}(k))$.

(*b*) Modifique el programa del problema 4 para calcular el cociente $Q(t, k)$ para cada paso usado en el item (4*b*). Grafique las tres funciones $Q(t, k)$ obtenidas en función de t.

Problema 7: Muestre que si el problema (2) se aproxima mediante un método estable de un paso de orden p, y se calculan dos soluciones $v^{(1)}(t, k)$ y $v^{(2)}(t, k/2)$ entonces, para k suficientemente pequeño,

$$|v^{(2)}(t,k/2) - y(t)| \le E, \qquad \text{si} \quad |v^{(1)}(t,k) - v^{(2)}(t,k/2)| \le (2^p - 1)E. \tag{5}$$

Problema 8: Realize un programa que implemente Euler mejorado para aproximar el problema

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = y - y^3 + \sin(t), \\ &y0) = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

para $t \in [0, T = 10]$. Se desea obtener una aproximación con error absoluto menor que $E = 10^{-4}$ en todo el intervalo de interés. Utilice el criterio (5) para estimar el error global. Comienze con $k = 0.1$. Si el error obtenido no satisface el requerimiento, divida el error por la mitad y recalcule. Una vez que obtenga una aproximación que satisfaga la tolerancia requerida, dé el valor de k, el máximo del error en el intervalo $[0, T]$, grafique la solución y la estimación del error global en gráficos separados.

Problema 9: Considere el problema de valores iniciales para un péndulo forzado

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \sin(t) = A\cos(\omega t),$$
$$\Theta(0) = 0, \frac{d\Theta}{dt}(0) = 0.$$

(a) Reduzca la ecuación a un sistema de ecuaciones primer orden, y haga un programa de computadora que implemente el métdo de Euler mejorado para aproximar el problema usando $A = 1$ y $\omega = 1$. Sean $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, y $u^{(3)}$ las soluciones numéricas que corresponden a pasos temporales k, $k/2$ y $k/4$ respectivamente. Sea T el mayor timepo tal que $|u^{(2)}(t) - \Theta(t)| \leq 0.3 \times 10^{-1}$ cuando $t \in [0, T]$. Su programa debe determinar T cuando $k = 10^{-1}$.

(b) Grafique, en el intervalo $[0, T]$, las soluciones $u^{(1)}$ y $u^{(2)}$ superpuestas.

(c) Calcule y grafique en $[0, T]$ el cociente de precisión $\tilde{Q}(t)$.

(d) Repita los puntos anteriores para $k = 10^{-2}$ y $k = 10^{-3}$.

Problema 10: Realice un programa que utilize el método de Runge-Kutta clásico de 4o orden para calcular la solución del problema (6) para $t \in [0, 10]$. Realice corridas con $k = 0.1$, $k/2$ y $k/4$. Grafique la solución $v(t, k/4)$. Su programa debe además calcular el cociente de precisión $\tilde{Q}(t)$. Grafique $\tilde{Q}(t)$. ¿Es el resultado satisfactorio?.

Problema 11: Considere el PVI (2). Pruebe que el error de truncamiento del método de Euler implícito, aplicado para resolver este problema, es

$$R_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{k} - f(y_{n+1}, t_{n+1}) = -\frac{k}{2}\frac{d^2y}{dt^2}\Big|_n + \mathcal{O}(k^2).$$

Pruebe además que el error de truncamiento de la regla trapezoidal es $\mathcal{O}(k^2)$, y halle explícitamente el coeficiente del término dominante.

Problema 12: Considere el problema rígido modelo

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = -y + \sin(t), \qquad 0 < \varepsilon \ll 1,$$
$$y(0) = y_0.$$

(a) Calcule la solución exacta $y(t)$.

(b) Utilize el método de Euler implícito para calcular una aproximación numérica usando: $\varepsilon = 10^{-3}$, $y_0 = -\varepsilon/(1+\varepsilon^2)$, $k = 0.01$. Grafique, en el intervalo $[0, \pi]$ el error $e_n = v_n - y(t_n)$.

(c) Repita el item anterior pero usando la regla trapezoidal en vez del método de Euler implícito. ¿Cuál de los dos métodos produce una mejor aproximación?

(d) Repita ambos items anteriores pero esta vez con $\varepsilon = 10^{-6}$. ¿Mantiene su conclusión?

(*e*) Repita ahora los tres items anteriores pero usando $y_0 = 1$. ¿Qué observa?. Repase el concepto de L-estabilidad y explique lo que ocurre.

Problema 13: Para ampliar la región de estabilidad del método de leapfrog, definimos el método de *leapfrog modificado*, que aplicado a la ecuación lineal

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y + F(t), \quad \lambda = \eta + i\xi, \quad \eta, \xi \in \mathbb{R},\ \eta \leq 0.$$

es

$$\frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{2k} = \lambda v_n + F_n + \frac{\eta}{2}(v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}). \tag{7}$$

(*a*) Pruebe que este método es preciso de segundo orden.

(*b*) Muestre que la región de estabilidad de (7) incluye al semidisco

$$\big(\mathrm{Re}(\lambda k)\big)^2 + \big(\mathrm{Im}(\lambda k)\big)^2 < 1, \qquad \mathrm{Re}(\lambda k) \leq 0.$$

Problema 14: Pruebe que el método de Adams-bashforth de un paso es simplemente el método de Euler. Derive el método de Adams-Bashforth de dos pasos.

Problema 15: Muestre que los coeficientes β_j, $j = 0, 1, 2, 3$ del método de Adams-Bashforth de cuatro pasos deben satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= 1, \\
-\beta_1 - 2\beta_2 - 3\beta_3 &= \frac{1}{2}, \\
\frac{1}{2}\beta_1 + 2\beta_2 + \frac{9}{2}\beta_3 &= \frac{1}{6}, \\
-\frac{1}{6}\beta_1 - \frac{4}{3}\beta_2 - \frac{9}{2}\beta_3 &= \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

Muestre que los coeficientes $\beta_{-1}, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ del método de Adams-Moulton de cuatro pasos debe satisfacer:

$$\begin{aligned}
\beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= 1, \\
\beta_{-1} - \beta_1 - 2\beta_2 - 3\beta_3 &= \frac{1}{2}, \\
\frac{1}{2}\beta_{-1} + \frac{1}{2}\beta_1 + 2\beta_2 + \frac{9}{2}\beta_3 &= \frac{1}{6}, \\
\frac{1}{6}\beta_{-1} - \frac{1}{6}\beta_1 - \frac{4}{3}\beta_2 - \frac{9}{2}\beta_3 &= \frac{1}{24}, \\
\frac{1}{24}\beta_{-1} + \frac{1}{24}\beta_1 + \frac{2}{3}\beta_2 + \frac{27}{8}\beta_3 &= \frac{1}{120}.
\end{aligned}$$

Problema 16: Utilize el método de la curva frontera para graficar la región de estabilidad de los métodos de Adams-Bashforth y Adams-Moulton de cuatro pasos.