Métodos Numéricos Para Ecuaciones Diferenciales

–Guía 2–

Problema 1:*(operadores en diferencias).* Sea $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suave y $x_j = a + hj$, $h > 0$, $j \in \mathbb{Z}$, una grilla uniforme

(a) pruebe que

$$\begin{aligned} D_+u(x_j) &= \frac{du}{dx}(x_j) + \frac{h}{2}\frac{d^2u}{dx^2}(x_j) + \mathcal{O}(h^2) \\ D_-u(x_j) &= \frac{du}{dx}(x_j) - \frac{h}{2}\frac{d^2u}{dx^2}(x_j) + \mathcal{O}(h^2) \\ D_0u(x_j) &= \frac{du}{dx}(x_j) + \frac{h^2}{6}\frac{d^3u}{dx^3}(x_j) + \mathcal{O}(h^4) \\ D_+D_-u(x_j) &= \frac{d^2u}{dx^2}(x_j) + \frac{h^2}{12}\frac{d^4u}{dx^4}(x_j) + \mathcal{O}(h^4) \end{aligned}$$

(b) Encuentre valores de α y β tales que

$$\begin{aligned} Du(x_j) &= D_0\Big(1 - h\alpha D_0\Big)u(x_j), \\ D^2u(x_j) &= D_+D_-\Big(1 - h^2\beta D_+D_-\Big)u(x_j) \end{aligned}$$

sean, respectivamente, aproximaciones de 4o orden de precisión para las derivadas primera y segunda respectivamente. Calcule además el término dominante para el error de truncamiento en cada caso.

Problema 2:*(normas vectoriales).* Sea $V = \mathbb{R}^m$ fijo y $\mathbf{v} \in V$ con componentes v_j, $j = 1, \ldots, m$. Se definen las normas

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_1 &= \sum_{j=1}^{m} |v_j|, \\ \|\mathbf{v}\|_2 &= \left(\sum_{j=1}^{m} |v_j|^2\right)^2, \\ \|\mathbf{v}\|_\infty &= \max_{1\le j\le m} |v_j|, \end{aligned}$$

Pruebe las relaciones de equivalencia

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_\infty \le \|v\|_1 \le m\|v\|_\infty, \\ \|\mathbf{v}\|_\infty \le \|v\|_2 \le \sqrt{m}\|v\|_\infty, \\ \|\mathbf{v}\|_2 \le \|v\|_1 \le \sqrt{m}\|v\|_2. \end{aligned}$$

Problema 3:*(normas matriciales subordinadas).* Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$. La norma matricial subordinada a una norma vectorial es

$$\|A\| = \max_{\|\mathbf{v}\|=1} \|A\mathbf{v}\|.$$

El *radio espectral* de A es mayor de los módulos de los autovalores de A. Si denotamos con a_{ij} las entradas de A, probar que

$$\begin{aligned}\|A\|_1 &= \max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|,\\ \|A\|_\infty &= \max_{1\leq j\leq m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|,\\ \|A\|_2 &= \sqrt{\rho(A^t A)}.\end{aligned}$$

Pruebe además que si A es diagonalizable, entonces $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Problema 4:*(Normas para funciones de grilla).* Sea v_i una función de grilla en el intervalo $[a, b]$. La grilla se define como $x_j = a + hj,\ j = 0, 1, 2, \ldots, m + 1,\ h = (b - a)/(m + 1)$. Si definimos un vector $\mathbf{v}$ con componentes v_j, $\mathbf{v}$ tiene N componentes (según la aplicación N puede valer, típicamente, m, $m+1$ o $m+2$). Si pensamos ahora en h como un parámetro variable, la dimensión del espacio vectorial será variable: $N \simeq \mathcal{O}(h^{-1})$. En este caso se redefinen las normas vectoriales como aproximaciones de las normas integrales de funciones en el intervalo en cuestión. Esto es,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|_{h,1} &= h\sum_{j=1}^{m} |v_j|,\\ \|\mathbf{v}\|_{h,2} &= \left(h\sum_{j=1}^{m} |v_j|^2\right)^2,\\ \|\mathbf{v}\|_{h,\infty} &= \max_{1\leq j\leq m} |v_j|.\end{aligned}$$

Pruebe que en este caso las equivalencias correspondientes son

$$\begin{aligned}h\|\mathbf{v}\|_{h,\infty} \leq \|v\|_{h,1} \leq Nh\|v\|_{h,\infty} &= \frac{N}{m+1}(b-a)\|v\|_{h,\infty},\\ \sqrt{h}\|\mathbf{v}\|_{h,\infty} \leq \|v\|_{h,2} \leq \sqrt{Nh}\|v\|_{h,\infty} &= \sqrt{\frac{N}{m+1}(b-a)}\|v\|_{h,\infty},\\ \sqrt{h}\|\mathbf{v}\|_{h,2} \leq \|v\|_{h,1} \leq \sqrt{Nh}\|v\|_{h,2} &= \sqrt{\frac{N}{m+1}(b-a)}\|v\|_{h,2}.\end{aligned}$$

Note que cuando $h \to 0$, $N/(m + 1) \to 1$, pero las cotas inferiores tienden a cero y por lo tanto las normas dejan de ser equivalentes.

Problema 5:*(Problema de valores de frontera con coeficientes constantes en 1D).* Considere el problema de valores de frontera

$$\begin{gathered}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + u = f(x), \qquad 0 < x < 1,\\ u(0) = 0, \qquad u(1) = 0.\end{gathered}$$

(a) Calcule la solución exacta $u(x)$ para $f(x) = -10e^{-5x}$.

(b) Aproxime las derivadas con diferencias centradas de segundo orden, es decir

$$\frac{d^2}{dx^2} \simeq D_+D_-, \qquad \frac{d}{dx} \simeq D_0,$$

en la grilla $x_i = hi,\ i = 0, 1, 2, \ldots, m, m + 1,\ h = 1/(m + 1)$. Resuelva el problema en diferencias finitas resultante mediante un método directo usando $h = 0.01$. Grafique la solución numérica (v_i) y la exacta en un mismo gráfico. Grafique separadamente el error global $E_i = v_i - u(x_i)$.

(c) Repita el item anterior usando $h = 0.001$. ¿Decrece el error en el factor esperado?

Problema 6: *(Problema de valores de frontera con coeficientes variables en 1D).* Considere el problema de valores de frontera

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \sin(\pi x)\frac{du}{dx} + \cos(\pi x)u = -10e^{-5x}, \qquad 0 < x < 1,$$
$$u(0) = 0, \qquad u(1) = 0.$$

(a) Aproxime las derivadas con diferencias centradas de segundo orden, es decir

$$\frac{d^2}{dx^2} \simeq D_+D_-, \qquad \frac{d}{dx} \simeq D_0,$$

en la grilla $x_i = hi,\ i = 0, 1, 2, \ldots, m, m+1,\ h = 1/(m+1)$. Resuelva el problema en diferencias finitas resultante mediante un método directo usando tres valores de h : $h_1 = 0.01$, $h_2 = 0.005$, y $h_3 = 0.0025$. Grafique la solución numérica obtenida para la grilla más fina.

(b) Utilizando las tres soluciones numéricas calcule y grafique el cociente de precisión

$$Q_i = \frac{v_i^{h_1} - v_{2i}^{h_2}}{v_{2i}^{h_2} - v_{4i}^{h_3}}.$$

¿Obtiene el resultado esperado?

Problema 7: *(Problema no lineal de valores de frontera en 1D).* Considere el problema de valores de frontera

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \sin(u)\frac{du}{dx} + \cos(\pi x)u = \frac{-10e^{-5x}}{\frac{1}{10} + u^2}, \qquad 0 < x < 1,$$
$$u(0) = 0, \qquad u(1) = 0.$$

(a) Aproxime las derivadas con diferencias centradas de segundo orden, es decir

$$\frac{d^2}{dx^2} \simeq D_+D_-, \qquad \frac{d}{dx} \simeq D_0,$$

en la grilla $x_i = hi,\ i = 0, 1, 2, \ldots, m, m+1,\ h = 1/(m+1)$. Resuelva el problema en diferencias finitas mediante el método de Newton. Las iteraciones de Newton se deben detener cuando la norma ∞ del vector incremento sea menor que $\epsilon = 10^{-14}$. Realice corridas con tres valores de h : $h_1 = 0.01$, $h_2 = 0.005$, y $h_3 = 0.0025$. Grafique la solución numérica obtenida para la grilla más fina.

(b) Utilizando las tres soluciones numéricas calcule y grafique el cociente de precisión

$$Q_i = \frac{v_i^{h_1} - v_{2i}^{h_2}}{v_{2i}^{h_2} - v_{4i}^{h_3}}.$$

¿Obtiene el resultado esperado?

Problema 8: *(Ecuación de Poisson semilineal)* Considere el problema elíptico semilineal

$$\begin{aligned} \Delta u &= -\frac{f(x,y)}{u^2}, \quad (x,y) \in \Omega = [0,L] \times [0,L], \\ u|_{\partial\Omega} &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Aquí Δ representa el operador Laplaciano en el plano en coordenadas Cartesianas x, y.

(a) Utilizando una grilla uniforme $(x_i, y_j) = h(i,j)$ $i,j \in \mathbb{Z}$, con $h = 1/(m+1)$, discretize el problema utilizando los operadores en differencias D_+D_- para aproximar las derivadas segundas (Laplaciano de 5 puntos). Tome un ordenamiento de las variables $v_{i,j}$ de manera de obtener un sistema semi lineal

$$A\mathbf{v} = -h^2\mathbf{F}(x_i, y_j, \mathbf{v}), \tag{2}$$

donde A es una matriz real simétrica.

(b) Escriba un código que implemente el método de Newton para tratar la nolinealidad y el método de Gauss-Seidel para resolver los sistemas lineales resultantes a cada paso de Newton. Adopte un criterio de detención que detenga las iteraciones de Newton cuando la norma $\|\|_\infty$ del resíduo de (2) sea menor que ε. Grafique la solución y tome nota del tiempo de máquina utilizado para obtener la solución. Utilize

$$f(x,y) = \frac{\cos(\pi(x-1/2))}{1+10(y-1/2)^2}, \quad m = 127, \quad L = 1, \quad \varepsilon = 10^{-6}.$$

(c) Modifique el código anterior para reemplazar Gauss-Seidel por el método del gradiente conjugado. Repita los cálculos y compare los resultados con los del punto anterior.

(d) Pruebe resolver el problema cambiando el signo de la inhomogeneidad. ¿qué ocurre?

Problema 9: *(Multigrilla)* Escriba un programa para resolver el problema 7 mediante el método de multigrillas. Utilize una grilla fina con $h = 1/128$. Utilize Jacobi sub relajado como suavizador, restricción simple para pasar de una grilla fina a la más grusa inmediata, e interpolación lineal para pasar de una grilla gruesa a la más fina inmediata. En la grilla más gruesa utilize suficientes iteraciones de Gauss-Seidel nolineal para aproximar la solución del sistema no lineal. Haga ensayos y adopte números de iteraciones para suavizar y criterios de detención de acuerdo a sus ensayos. Realice corridas con 2 niveles de grilla y con 5 niveles de grilla. Compare los tiempos de ejecución.