Métodos Numéricos Para Ecuaciones Diferenciales

–Guía 3–

Problema 1: *(Interpolación de Fourier)* Considere la función 1-periódica discontínua

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } x = 0, \text{ y } x = \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1, \end{cases}$$

y la grilla $x_j = hj$, $h = 1/(2M+1)$, $j \in \mathbb{Z}$. Utilize series geométricas finitas para demostrar que los coeficientes del interpolante de Fourier de g son

$$\tilde{g}(\omega) = -2i\frac{\sin(\pi\omega h M)\sin(\pi\omega h(M+1))}{\sin(\pi\omega h)}h.$$

Problema 2: *(Error del interpolante de Fourier)* Considere la función diente de sierra

$$s(x) = \begin{cases} x & \text{si } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } x = \frac{1}{2}, \end{cases} \qquad s(x+1) = s(x),$$

en el intervalo $x \in [0, 1)$.

(a) Calcule los coeficientes de Fourier $\hat{s}(\omega)$.

(b) Usando $M = 10$ calcule y grafique la suma parcial de Fourier

$$s_M^F(x) = \sum_{\omega=-M}^{M} \hat{s}(x)e^{2\pi i\omega x}.$$

Grafique el error $e_M^F(x) = s_M^F(x) - s(x)$.

(c) Para $M = 10$, calcule y grafique el polinomio interpolatorio de Fourier

$$s_M^I(x) = \sum_{\omega=-M}^{M} \tilde{s}(x)e^{2\pi i\omega x}.$$

Grafique el error $e_M^I(x) = s_M^I(x) - s(x)$.

(d) Repita los items (b) y (c) para $M = 100$.

Problema 3: *(Disipación artificial)* Pruebe que la aproximación

$$\frac{dv}{dt}(x_j, t) = (aD_0 - bh^2 D_+^2 D_-^2)v(x_j, t) + cv(x_j, t), \quad b > 0,$$

es una aproximación de segundo orden de precisión de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} + cu. \tag{1}$$

Problema 4: *(Método de Lax-Wendroff)* La aproximación semidiscreta

$$\frac{dv}{dt}(x_j, t) = (aD_0 + bhD_+D_-)v(x_j, t) + cv(x_j, t),$$

de la ecuación (1) es en general de primer orden. Pruebe que si se utiliza el mátodo de Euler con paso temporal k para integrar en el tiempo, la aproximación se convierte en precisa de segundo orden para la elección específica del parámetro $b = a^2k/2h$.

Problema 5:*(Ecuación del calor)* Considere el problema de Cauchy para la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con dato inicial 1-periódico

$$f(x) = \sin(2\pi x) + 10\sin(10\pi x),$$

en el dominio $[0, 1)$.

(a) Resuelva el problema analíticamente y grafique la solución exacta para $t = 0.004$ y $t = 0.2$

(b) Sea $h = 1/N$ y considere la aproximación en diferencias finitas dada por

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{k} = D_+D_-v_j^n, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N-1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

con $k = h^2/10$, donde v_j^n aproxima a la solución en el punto de grilla $x_j = hj$, y al tiempo $t_n = kn$. Calcule y grafique, a los mismos tiempos del item (a), la solución para $N = 10$.

(c) Calcule y grafique el error $e_j^n = v_j^n - u(x_j, t_n)$ a los mismos tiempos.

(d) Usando una grilla más fina, con mesh-size $h/2$, calcule una nueva solución numérica w_j^n. Calcule y grafique el cociente de precisión

$$Q_j^n = \frac{v_j^n - u(x_j, t_n)}{w_j^n - u(x_j, t_n)}, \quad \text{a } t_n = 0.2$$

¿Obtiene el resultado esperado?

(e) Repita los items (b), (c) y (d) con $h = 1/100$.

Problema 6: Ejercicios 10.2, 10.3, 10.5 y 10.6 del libro KO.

Problema 7: Considere el problema de valores iniciales y de frontera para la ecuación inhomogénea del calor en dos dimensiones

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + q(x, y, t), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad t \geq 0, \quad \kappa > 0,$$

$$u(x, y, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) = 0, \qquad u(1, y, t) = u(x, 1, t) = 0.$$

(a) Defina

$$E(t) = \|u\|^2 = \int_0^1 \int_0^1 |u(x, y, t)|^2 \, dxdy,$$

y pruebe que el problema es estable.

(b) Construya una aproximación semidiscreta (t permanece contínuo) en diferencias finitas que sea precisa de orden dos, defina una energía apropiada y demuestre que su aproximación es estable.

(c) Considere el caso $\kappa = 1$, y $q(x, y, t) = 16xy(1-x)(1-y)e^{-100[(x-\frac{1}{4})^2+(y-\frac{1}{2})^2]}$. Utilice un método de orden dos o más de precisión para integrar temporalmente el problema semidiscreto del item anterior. Imprima gráficos de la solución para los tiempos $t = 0.004$, $t = 0.1$ y $t = 0.2$. (Utilice un mesh size como para que la variación espacial de todas la funciones involucradas sea buena, ¿cómo podría verificarlo cuantitativamente?).