MATEMATICA DISCRETA II-2019, Práctico 1
(REPASO DE DFS Y BFS)

Vieron DFS y BFS en Algoritmos II. Repasen los conceptos y hagan los siguientes ejercicios.

(1) Sea G el grafo definido por la siguiente lista de adyacencia:

a	b	c	d	e	f	g	h
b	a	b	a	b	g	c	a
d	c	d	b			f	g
h	d	g	c			h	
	e						

a) Use el metodo DFS en G empezando por g. (A partir de alli, cada vez que una elección sea posible, elija por orden alfabetico).
b) ¿Es G conexo?
c) Idem que a) pero empezando en c.
d) Idem que a) pero usando el metodo BFS.
e) Idem que c) pero usando el metodo BFS.

(2) Repetir el ejercicio anterior con el grafo dado por:

a	b	c	d	e	f	g	h	i
e	d	e	b	a	c	b	b	a
i	g	f	g	c	e	d	d	c
	h	i	h	f	i			f

(3) a) Sea v un vertice del grafo completo K_n. Calcular la altura de los arboles DFS y BFS de K_n con raiz en v.
b) Idem para el ciclo C_n.

(REPASO DE COMPLEJIDAD)

(4) Este ejercicio no debería ser necesario pero en años anteriores he descubierto que algunos alumnos son densos o faltaron a la clase de Algoritmos II donde se explica la diferencia entre algoritmos $O(n^2)$, $O(n\lg n)$ y $O(n)$. Suponga que esta implementando un algoritmo que toma un conjunto ordenado de n vértices y los ordena de acuerdo a algún criterio, por ejemplo para luego correr Greedy. Supongamos que puede hacer mil millones de operaciones por segundo, que tiene 4 millones de vértices y que debe hacer 1000 reordenamientos. (para correr Greedy con cada uno de esos ordenamientos y quedarse con el mejor coloreo). Calcule un orden del tiempo que tardará con un algoritmo de ordenación $O(n)$, otro $O(n\lg n)$ y otro $O(n^2)$. (nota: como deben haber aprendido en Algoritmos II, no siempre (de hecho, muy rara vez) se puede usar un algoritmo de ordenación $O(n)$ pero por ejemplo, si se quiere ordenar los vértices de acuerdo con su grado o su color, entonces si se puede).

Coloreo

Recordatorio general: si se pide el número cromático de un grafo y Ud. dice que $\chi(G) = k$, entonces debe dar un coloreo propio con k colores y probar que no hay uno con $k-1$.

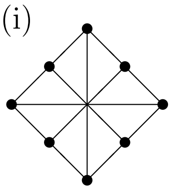
(5) El grafo de Petersen viene dado por la siguiente lista de adyacencia:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
b	a	b	c	d	a	b	c	d	e
e	c	d	e	a	h	i	j	f	g
f	g	h	i	j	i	j	f	g	h

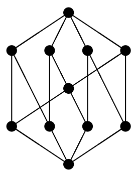
a) Correr Greedy en el grafo de Petersen en el orden afcegdbhij.
b) Correr Greedy en el grafo de Petersen en el orden alfabetico.
c) Calcular el numero cromatico del grafo de Petersen.

(6) Hallar el número cromático de los siguientes grafos.

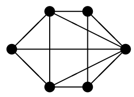
(i)



(ii)



(iii)



(7) Para $r \geq 2$, el grafo M_r se obtiene del grafo C_{2r} agregando las aristas que unen vértices opuestos. (i.e., i con $r+i$ para $i = 1, 2, ..., r$). Un ejemplo se puede ver en el ejercicio anterior, item (i), donde se tiene M_4. Calcular $\chi(M_r)$. (Deberá distinguir entre los casos r impar, $r = 2$ y r par > 2).

(8) Decidir si lo siguientes son verdaderos o falsos. Probar los que sean verdadero (si hay alguno) y dar un contraejemplo para los falsos. (si hay alguno). Para todos los casos, sea G un grafo coloreado POR GREEDY en algún orden con t colores y sean V_i los vertices coloreados con i.

a)*Si se ordenan los vértices poniendo primero los vertices de* V_1 *luego los de* V_2*, etc hasta* V_t*, en ese orden entonces corriendo Greedy con este nuevo orden Greedy con este nuevo orden colorea a cada vértice con exactamente el mismo color que tenia antes.*

b)*Si se ordenan los vértices poniendo primero los vertices de* V_1 *luego los de* V_2*, etc hasta* V_t*, en ese orden entonces corriendo Greedy con este nuevo orden Greedy colorea a G con exactamente* t *colores.*

c)*Supongamos ahora que* $t = 5$*. Si se ordenan los vértices poniendo primero los vertices de* V_1 *luego los de* V_2*, luego los de* V_3*, luego los de* V_5 *y al final los vértices de* V_4*, entonces corriendo Greedy con este nuevo orden colorea a cada vértice con exactamente el mismo color que tenia antes.*

d)*Supongamos ahora que* $t = 5$*. Si se ordenan los vértices poniendo primero los vertices de* V_1 *luego los de* V_2*, luego los de* V_3*, luego los de* V_5 *y al final los vértices de* V_4*, entonces corriendo Greedy con este nuevo orden Greedy colorea a G con exactamente* 5 *colores.*

e) *Supongamos ahora que* $t = 5$*. Si se ordenan los vértices poniendo primero los vertices de* V_1 *luego los de* V_2*, luego los de* V_4*, luego los de* V_3 *y al final los vértices de* V_5*, entonces corriendo Greedy con este nuevo orden Greedy colorea a G con exactamente* 5 *colores.*

(9) Dar el algoritmo MAS RÁPIDO POSIBLE que resuelva el siguiente problema:

Input: (T, n, m), donde T es un árbol, n es el número de vertices y m es el número de lados.

Output: $\chi(G)$

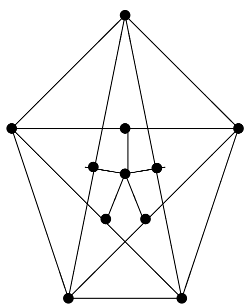
(10) Dado n natural, sea G_n el grafo cuyos vertices son los números $1, 2, ..., n$ y cuyos lados son los $\{i, j\}$ tales que $mcd(i, j) = 1$. Calcular $\chi(G_{100})$.

(11) En el teórico vimos un ejemplo de un grafo bipartito con n vertices de forma tal que el greedy usa $n/2$ colores. (con n par).

a) Dé un ejemplo de un grafo bipartito donde el greedy use $(n + 1)/2$ colores (con n impar).

b) Dé un ejemplo de un grafo bipartito donde el Greedy use $(n + 2)/2$ colores (con n par).

(12) Hallar el número cromático del siguiente grafo.



(13) Sea G el grafo cuyos vertices son los 1225 casilleros de un tablero cuadrado con 35 filas y 35 columnas. Dos vertices son vecinos si poniendo una reina de ajedrez en cada uno de los casilleros las reinas se atacan mutuamente. (es decir, si los casilleros estan en una misma fila, columna o diagonal, donde diagonal no es necesariamente una de las diagonales principales). Probar que $\chi(G) = 35$.

(14) Sea G un grafo tal que $\chi(H) < \chi(G)$ para todo subgrafo H propio de G. (un grafo asi se llama k-crítico, si $\chi(G) = k$). Probar que $\chi(G) \leq \delta + 1$.

(15) Dar un algoritmo polinomial que resuelva el siguiente problema:

Input: Un grafo G que se garantiza que es conexo no regular con $\Delta \leq 3$.

Output: $\chi(G)$ y un coloreo propio con $\chi(G)$ colores.

(nota: para probar que es polinomial debe probar su complejidad).