Complejidad de Dinic

Veamos la complejidad del paso de obtener un blocking flow en Dinic.

Observemos que luego de AUMENTAR siempre reinicializamos todo y comenzamos de vuelta. Denotemos por I un paso de esto: AUMENTAR+INICIALIZAR.

Denotemos por A el paso de AVANZAR y por R el paso de RETROCEDER.

Observemos que, ademas de una inicialización original, que no la cuento porque es $O(1)$), los caminos en Dinic van a ser, de acuerdo con el pseudocodigo, cada uno de una forma parecida a:

$$AAA....ARAAA..RRARA...I$$

Es decir, tendre una sucesion de AVANZAR, quizas con algunos RETROCEDER intercaladados, hasta que finalmente AUMENTAMOS e INICIALIZAMOS.

Poniendo estos caminos todos juntos, resulta que un paso de encontrar un blocking flow usando DINIC se puede representar como una palabra de la forma

$$AAA....ARAAA..RRARA...IAA...ARRR...AAAIA....R....AIA........AIA.....RRRRR$$

¿Que caracteristicas tiene esta palabra?

Observemos que:

1) Hay a lo sumo n "A" antes de llegar a un R o un I.

Esto es porque cada A mueve el pivote x mas cerca de t, por lo tanto, luego de a lo sumo n movidas, o bien llegamos a t y hacemos un I, o bien debemos retroceder.

2) En cada R o cada I, se borra al menos un lado, por lo tanto, el total de $R+I$ es a lo sumo m.

Denotemos por X una letra R o una letra I. Entonces la palabra en realidad es de la forma

$$\overbrace{A...A}^{r_1}X\overbrace{A...A}^{r_2}X\overbrace{A.....A}^{r_3}XXA.....AXXX$$

donde cada r_i es menor o igual que n.

Es decir, la palabra queda dividida en a lo sumo m subpalabras del tipo $\overbrace{A...A}^{r_i}X$ (donde r_i puede ser 0). ¿Cual es la complejidad de cada una de esas palabras?

.- Cada A es $O(1)$, y hay a lo sumo n de ellos.

.- Cada R es $O(1)$.

.- Cada I es $O(n)$ (hay que recorrer todo el camino, pero el camino es de longitud a lo sumo n, porque es un camino dirigido en un network por niveles)

.- Por lo tanto cada X es $O(1)$ o $O(n)$, es $O(n)$.

.-Asi, cada palabra $A....AX$ es $\overbrace{O(1)+...+O(1)}^{\leq n \text{ veces}}+O(n)=O(n)+O(n)=O(n)$.

.- Como hay a lo sumo m tales palabras, la complejidad final del blocking step es $\overbrace{O(n)+...+O(n)}^{\leq m \text{ veces}}=O(nm)$.

Como vimos, la complejidad total de los algoritmos del tipo de Dinic es $O(n)$.(complejidad de hallar un blocking flow)

Por lo tanto, Dinic es $O(n^2m)$.