Matematica Discreta II -2016

Teóricos del final

La parte teórica del final consistirá de 4 preguntas. Habrá una pregunta de la lista A abajo, dos de la B y una de la C. Las preguntas de la parte B valdrán entre 0 y 2,5 puntos cada una. (2,5 puntos por hacerlas bien, 0 por hacerlas mal o no hacerlas, intermedio por algo intermedio). La pregunta de la parte C valdrá entre -1 y 2 puntos. (-1 por no hacerla o hacerla mal, 2 por hacerla bien, intermedio por algo intermedio). La pregunta de la parte A valdrá entre -3 y 3 puntos (-3 por no hacerla o hacerla mal, 3 por hacerla bien, intermedio por algo intermedio). Se aprueba sumando 4 en total.

===============*Parte A*================

(1) ¿Cuál es la complejidad del algoritmo de Edmonds-Karp? Probarlo.(Nota: en la prueba se definen unas distancias, y se prueba que esas distancias no disminuyen en pasos sucesivos de EK. Ud puede asumir esto sin probarlo).

(2) Probar que las distancias definidas en la prueba de la complejidad de Edmonds-Karp no disminuyen en pasos sucesivos de Edmonds-Karp.

(3) ¿Cual es la complejidad del algoritmo de Dinic? Probarla. (no hace falta probar que la distancia en networks auxiliares sucesivos aumenta).

(4) ¿Cual es la complejidad del algoritmo de Wave? Probarla. (no hace falta probar que la distancia en networks auxiliares sucesivos aumenta).

(5) Probar que la distancia en networks auxiliares sucesivos aumenta.

===============*Parte B*================

(6) Probar que 2-COLOR es polinomial.

(7) Probar que:
a) el valor de todo flujo es menor o igual que la capacidad de todo corte.
b) Si el valor de un flujo es igual a la capacidad de un corte entonces el flujo es maximal (y el corte minimal).
c) Si un flujo es maximal entonces existe un corte con capacidad igual al valor del flujo.

(puede usar sin probarlo el lema asociado de que al cambiar el flujo por medio de un camino aumentante de capacidad ϵ lo que queda sigue siendo flujo y su valor se incrementa en ϵ. Tambien puede usar sin probarlo que si S es un corte, y f es un flujo, entonces $v(f) = f(S, \overline{S}) - f(\overline{S}; S)$.)

(8) Probar que el algoritmo Húngaro tiene complejidad $O(n^4)$. (en realidad vimos que se puede codificar en $O(n^3)$, pero la prueba requería mas detalles, solo pido la parte "fácil").

(9) Enunciar y probar el Teorema de Hall.

(10) Enunciar y probar el teorema del matrimonio.

(11) Probar que si G es bipartito entonces $\chi'(G) = \Delta$. (en la prueba se veia que para todo G bipartito existe un H bipartito regular que lo contiene y con $\delta(H) = \Delta(G)$. Ud debe probar esto también).

(12) Enunciar el teorema de la cota de Hamming y probarlo.

(13) Sea H una matriz de chequeo de un código C.
a) Probar que $\delta(C) =$ mínimo número de columnas linealmente dependientes de H.
b) Probar que si H no tiene la columna cero ni columnas repetidas entonces C corrije (al menos) un error.

(14) Sea C un código cíclico de dimensión k y longitud n y sea $g(x)$ su polinomio generador.
a) Probar que C esta formado por los múltiplos de g de grado menor a n.
b) Probar que el grado de g es $n - k$.
c) Probar que $g(x)$ divide a $1 + x^n$.

===============*Parte C*================

(15) Probar que 4-COLOR $\leq_P$ SAT. (sin usar Cook, obvio).

(16) Probar que 3-SAT es NP-completo.

(17) Probar que 3-COLOR es NP-completo.