

Complejidad de Edmonds-Karp

Para facilitar la prueba, supondremos que si en el network esta el lado \overrightarrow{xy} , entonces no esta el lado \overrightarrow{yx} . Esta propiedad no es restrictiva, pues si esa situacion ocurre, simplemente podemos agregar en cada lado un vertice intermedio. Esto simplemente duplica el numero de lados, por lo que la complejidad no cambia.

Definición. *Dados vertices x, y en un network, diremos que el lado virtual \overrightarrow{xy} esta **disponible** si \overrightarrow{xy} es un lado con $f(\overrightarrow{xy}) < c(\overrightarrow{xy})$ o bien \overrightarrow{yx} es un lado con $f(\overrightarrow{yx}) > 0$.*

Un camino aumentante entre s y x es un camino por lados (virtuales) disponibles.

Definición: *Sea $d_k(x)$ igual a la distancia entre s y x luego de $k-1$ pasos de EK, donde por distancia entendemos lo siguiente: Sea*

$$L_k(x) = \{p : \exists \text{ camino aumentante de longitud } p \text{ entre } s \text{ y } x \text{ luego del paso } k-1\}$$

y tomamos:

$$d_k(x) = \begin{cases} \text{Min } L_k(x) & \text{si } L_k(x) \neq \emptyset \\ \infty & \text{si } L_k(x) = \emptyset \end{cases}$$

(recordemos que por convencion $\text{Min}\emptyset = \infty$, asi que podemos decir simplemente $d_k(x) = \text{Min } L_k(x)$).

Similarmente, definimos $b_k(x)$ igual a la distancia entre x y t luego de $k-1$ pasos.

Lema: *Si \overrightarrow{xy} esta disponible en el paso k (i.e., luego del paso $k-1$), entonces $d_k(y) \leq d_k(x) + 1$.*

Prueba: Observar que, puesto que $L_k(x)$ se construye luego del paso $k-1$, los caminos que medimos en L_k seran los caminos posibles que pueden ser usados **en** el paso k . Por lo tanto, si tenemos dos vertices x e y tales que \overrightarrow{xy} esta disponible luego del paso $k-1$, entonces, si tenemos un camino aumentante de longitud minima entre s y x : $s\dots x$, podemos agregar y al final de ese camino para tener un camino aumentante $s\dots y$. La longitud de este camino es $d_k(x) + 1$, por lo tanto $d_k(x) + 1 \in L_k(y)$, asi, $d_k(y) = \text{Min}L_k(y) \leq d_k(x) + 1$. QED

Lema: *Las distancias definidas anteriormente no disminuyen en pasos sucesivos, i.e.:*

$$d_k(x) \leq d_{k+1}(x) \quad \forall x. \quad (\text{y similar para } b_k).$$

Prueba: Supongamos que no sea cierto. Entonces, existe un z con $d_{k+1}(z) < d_k(z)$. Por lo tanto, el conjunto $A = \{z : d_{k+1}(z) < d_k(z)\}$ es no vacio. Sea $y \in A$ tal que:

$$d_{k+1}(y) = \text{Min} \{d_{k+1}(z) : z \in A\}$$

En particular, por ser $y \in A$ tenemos:

$$d_{k+1}(y) < d_k(y) \quad (0)$$

Ademas, el hecho de que $d_{k+1}(y)$ sea el minimo sobre los elementos de A implica que:

$$d_{k+1}(x) < d_{k+1}(y) \Rightarrow x \notin A \Rightarrow d_k(x) \leq d_{k+1}(x) \quad (1)$$

Observemos que $y \neq s$, pues al ser $d_k(s) = d_{k+1}(s) = 0$, $s \notin A$. Igualmente, $d_{k+1}(y) < \infty$, pues al estar y en A , $d_{k+1}(y) < d_k(y) \leq \infty$. Por lo tanto, existe un camino aumentante (en el paso $k+1$) entre s e y , y en ese camino hay al menos un vertice ademas de y . Tomando el camino de menor longitud y a x el vertice inmediatamente anterior a y en ese camino, tenemos que:

$$d_{k+1}(y) = d_{k+1}(x) + 1 \quad (2)$$

En particular, $d_{k+1}(x) < d_{k+1}(y)$, por lo tanto, por (1), tenemos que:

$$d_k(x) \leq d_{k+1}(x) \quad (3)$$

Asi:

$$d_k(y) \stackrel{(0)}{>} d_{k+1}(y) \stackrel{(2)}{=} d_{k+1}(x) + 1 \\ \stackrel{(3)}{\geq} d_k(x) + 1 \quad (4)$$

Por el lema anterior, si \overrightarrow{xy} estuviese disponible en el paso k , tendríamos $d_k(y) \leq d_k(x) + 1$, contradiciendo (4). Por lo tanto, \overrightarrow{xy} no esta disponible en el paso k . Pero \overrightarrow{xy} forma parte de un camino aumentante entre s e y en el paso $k + 1$. Por lo tanto esta disponible en el paso $k + 1$. La unica forma de que no este disponible en el paso k pero disponible en el $k + 1$ es que haya sido usado *en la direccion contraria* en el paso k .

Es decir, si \overrightarrow{xy} es el lado, tenemos $f(\overrightarrow{xy}) = c(\overrightarrow{xy})$ luego del paso $k - 1$, pero entonces lo usamos como lado de tipo II en el paso k (ie., usamos el "lado" \overrightarrow{yx}) y disminuimos el flujo, dejandolo disponible como lado de tipo I para el paso $k + 1$.

O, si era \overrightarrow{yx} el lado, tenemos $f(\overrightarrow{yx}) = 0$ luego del paso $k - 1$, (asi, " \overrightarrow{xy} " NO estaba disponible en el paso k) pero lo usamos (a \overrightarrow{yx}) como lado de tipo I en el paso k y aumentamos el flujo, dejando disponible a \overrightarrow{xy} como lado (de tipo II) para el paso $k + 1$.

De cualquier forma, **usamos** a \overrightarrow{yx} en el paso k , lo cual significa que tenemos un camino aumentante de la forma $s...yx$, en el paso k . Asi, $d_k(x) = d_k(y) + 1$ (5). (NOTA: esto es precisamente porque estamos usando EK: en general la existencia de un camino $s...yx$ no diria nada acerca de las distancias, pero, como se usa en un paso de EK, que funciona por BFS, i.e., distancias minimas, entonces si se uso ese camino, ese camino es de distancias minimas).

Entonces:

$$d_k(y) \stackrel{(4)}{>} d_k(x) + 1 \stackrel{(5)}{=} d_k(y) + 2$$

ie., $0 > 2$ absurdo.

Una prueba similar vale para b_k . QED

Definición: Diremos que un lado \overrightarrow{xy} es "critico" en el paso k si \overrightarrow{xy} esta disponible en el paso k pero no en el $k + 1$, o si \overrightarrow{yx} esta disponible en el paso k pero no en el $k + 1$. (i.e., se uso en alguna direccion en el paso k y se saturo en esa direccion).

Lema: Si \overrightarrow{xy} se volvio critico en el paso k , y vuelve a usarse en el paso ℓ , entonces $d_\ell(t) \geq d_k(t) + 2$. i.e., luego de que un lado se volvio critico, no puede usarse de vuelta hasta que la distancia entre s y t no haya aumentado en por lo menos 2.

Prueba: Para concretar, supongamos que se vuelve critico mientras se lo está usando en la direccion forward. (la prueba es similar para el otro lado). Si se vuelve critico, es porque se usa en un camino aumentante cosntruido (por estar en EK) mediante BFS, asi que tendremos $d_k(y) = d_k(x) + 1$.

La proxima vez que se use un lado debe ser al revés, y tendremos $d_\ell(x) = d_\ell(y) + 1$, por lo tanto:

$$d_\ell(t) = d_\ell(x) + b_\ell(x) \\ = d_\ell(y) + 1 + b_\ell(x) \\ \geq d_k(y) + 1 + b_k(x) = d_k(x) + 1 + 1 + b_k(x) = d_k(t) + 2$$

QED

Propiedad: La complejidad de Edmonds-Karp es $O(nm^2)$.

Prueba: Por el lema anterior, una vez que un lado se vuelve critico, solo puede volver a usarse luego de que la distancia entre s y t se incremente en al menos 2 unidades. En particular, un lado puede volverse critico a lo sumo una cantidad finita de veces: la diostancia entre s y t puede variar a lo sumo entre 1 y $n - 1$. Por lo tanto, tenemos que un lado se puede volver critico a lo sumo $\frac{n-1}{2}$ veces.

Como E-K vuelve algun lado critico en cada iteracion, tenemos que hay a lo sumo $m \frac{n-1}{2}$ iteraciones. Como cada iteracion es $O(m)$, resulta que la complejidad global de E-K es $O(m \frac{n-1}{2} m) = O(nm^2)$ QED