Teorem de Hall

Dado un grafo bipartito G con vertices divididos en partes X e Y, entonces existe un matching completo de X a Y si y solo si $|S| \leq |\Gamma(S)|\ \forall S \subseteq X$.

Prueba El "solo si" esta claro: si existe un matching completo de X a Y, el mismo induce una función 1-1 desde A a Y y por lo tanto la imagen de cualquier subconjunto de X debe ser al menos tan grande como el conjunto.

Veamos entonces el "si". Hay numerosas pruebas del T. de Hall, daremos una que se basa en los algoritmos que hemos visto.

Supongamos entonces que se cumple la condición $|S| \leq |\Gamma(S)|\ \forall S \subseteq X$ (condición de Hall). Recordemos que el algortimo que usamos para encontrar un matching maximal es basicamente correr Dinic hasta encontrar un matching inicial y luego corregirlo corriendo EK.

Veamos que pasa al correr el ultimo paso del algoritmo. Si el algortimo encuentra un matching competo, entonces ya esta: hemos probado que tal matching existe. Supongamos entonces que el algoritmo se detiene sin encontrar un matching completo.

Analizemos la ultima vez que el algoritmo intento aumentar el matching. Empezo con un conjunto S_0 de filas que estaban etiqueteadas como "filas sin matchear". Escaneo cada una de esas filas, las cuales etiquetearon diversas columnas. El conjunto de esas columnas lo denominaremos por T_1. Observar que en realidad tenemos $T_1 = \Gamma(S_0)$. Luego cada una de esas columnas agrega nuevas filas en la busqueda, supongamos que las denotamos por S_1. Estas a su vez agregan nuevas columnas, denotemoslas por T_2, etc. Observemos que T_2 NO es $\Gamma(S_1)$, pues al escanear las filas, solo se agregan las columnas que son vecinas QUE NO HAYAN SIDO YA ETIQUETEADAS. Es decir, T_2 es en realidad $\Gamma(S_1) - T_1$. En general, podemos seguir de esta forma, obteniendo T_i y S_i, donde tendremos que $T_{i+1} = \Gamma(S_i) - (T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_i)$. En otras palabras, los T_i son disjuntos y $T_1 \cup ... \cup T_{i+1} = \Gamma(S_1 \cup ... \cup S_i)$.

Ademas, observemos que al escanear una columna, esa columna, o bien no encuentra ninguna fila que la matchea (cosa que en este caso NO pasa porque el algoritmo termina sin poder extender el matching) o bien encuentra UNA fila (y SOLO UNA) que la matchea. Esto quiere decir que cada columna de T_i agrega solo una columna de S_i. Es decir, $|T_i| = |S_i|$.

Ademas, como el algoritmo para sin extender el matching, debe parar mientras se estan escaneando las filas, sin encontrar nuevas columnas. Es decir, si paramos en la iteración k, tenemos que $T_{k+1} = \emptyset$. Sea $S = S_0 \cup S_1 \cup ... \cup S_k$. Observemnos que la union es disjunta: Entonces:

$$\begin{aligned}
|\Gamma(S)| =& |T_1 \cup ... \cup T_k| \\
=& |T_1| + ... + |T_k| \\
=& |S_1| + ... + |S_k| \\
=& |S| - |S_0| \\
<& |S|
\end{aligned}$$

la ultima igualdad pues $S_0 \neq \emptyset$ porque al no ser el matching completo hay al menos una fila sin matchear. Entonces, hemos encontrado un S que viola la condición de Hall, absurdo.

QED

Observar que la prueba del teorema dice un poco mas: dice que cuando el algoritmo para sin encontrar un matching completo, el conjunto S de filas etiqueteadas es un conjunto que viola la condiciòn de Hall, y por lo tanto es un "testigo" de que no existe mathcing completo.

El teorema de Hall es a veces conocido como el "teorema del matrimonio", porque dice que si en un pueblo todo conjunto de k hombres conoce al menos a k mujeres entonces se pueden casar a todos los hombres con alguna mujer que al menos conocen.

Sin embargo, a veces se le da el nombre de "teorema del matrimonio" a otro teorema, parecido, que dice que, si cada hombre conoce exactamente k mujeres y cada mujer conoce a exactamente k hombres, para algun $k > 0$, entonces se pueden casar a todos los hombres y a todas las mujeres con alguien a quien conocen. En terminos tecnicos:

Teorema: *Todo grafo bipartito regular (con al menos un lado) tiene un matching perfecto.*

Prueba:

Denotemos las partes del grafo bipartito como X e Y.

Dado un conjunto S incluido ya sea en X o en Y, definamos $E_S = \{zw \in E | z \in S\}$.

Tenemos que:

$$\begin{aligned} |E_S| =& |\{zw \in E | z \in S\}| \\ =& \sum_{z \in S} d(z) \\ =& \Delta . |S| \qquad (\star) \end{aligned}$$

la ultima igualdad pues el grafo es regular.

En particular, como $E_X = E_Y = E$, tenemos por $(\star)$ que $\Delta|X| = \Delta|Y|$ y como $\Delta \neq 0$ (pues hay al menos un lado), entonces $|X| = |Y|$. Esta igualdad dice que para ver que hay un matching perfecto, basta con probar que hay un matching completo de X a Y, para lo cual basta ver que se satisface la condición de Hall. Tomemos entonces $S \subseteq X$. Entonces:

$$\begin{aligned} E_{\Gamma(S)} =& \{zw \in E | z \in \Gamma(S)\} \\ =& \{zw \in E | \exists x \in S | xz \in E\} \\ \supseteq& \{xz \in E | x \in S\} = E_S \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|E_{\Gamma(S)}| \geq |E_S|$. Por $(\star)$, esto implica que $\Delta|\Gamma(S)| \geq \Delta|S|$, por lo que $|\Gamma(S)| \geq |S|$.

QED.