Una cota inmediata que se obtiene de Greedy es la siguiente:

Propiedad :

$$\chi(G) \leq \Delta + 1$$

Prueba: Corramos Greedy con algún orden. Cuando querramos colorear a x_i, debemos eliminar los colores que aparezcan en $\Gamma(x_i) \cap \{x_1, ..., x_{i-1}\}$, que son a lo sumo $d(x_i) \leq \Delta$, por lo tanto siempre nos "sobra" un color para colorear a x_i. QED.

Hemos visto que $\chi(G) \leq \Delta + 1$. Observemos que la cota se puede alcanzar. De hecho, hay dos familias infinitas de grafos para los cuales se alcanza la cota:

1) **Los ciclos impares:** tienen $\chi(C_{2k+1}) = 3 = 2 + 1 = \Delta + 1$.
2) **Los grafos completos:** tienen $\chi(K_n) = n = (n-1) + 1 = \Delta + 1$.

¿Podemos hallar otros ejemplos (conexos)? En un teorema remarcable, Brooks probó que no:

Teorema de Brooks (1941)

`Sea` G `conexo que no sea un ciclo impar o un grafo completo. Entonces` $\chi(G) \leq \Delta$.

Prueba:

Supongamos primero:

Caso A: G no es regular.

Sea $x \in V : d(x) = \delta$.

Corramos `BFS`(x). *Esto da un cierto orden de los vertices. Ordenemos ahora los vertices $x_1, ..., x_n$ en el orden* **inverso** *al dado por* `BFS`. *(por lo tanto, $x_n = x$).*

Observemos que en el orden `BFS`*, cualquier vertice que no sea la raiz es incluido en el arbol SOLO POR UN VECINO QUE YA ESTABA en el arbol. Es decir, en el orden BFS, todo vertice, salvo la raiz, tiene un vecino ANTERIOR a el. Por lo tanto, en el orden INVERSO, todo vertice, salvo el ultimo, tiene un vecino POSTERIOR a el. Es decir,*

$$\forall i < n \exists j > i : x_i x_j \in E \qquad (1)$$

Corramos Greedy en el orden $x_1, ..., x_n$. Veamos que nunca necesitamos mas de Δ colores:

Para colorear x_1 solo necesitamos 1 color.

Supongamos por hipotesis inductiva que hemos coloreado $x_1, ..., x_{i-1}$ con $\leq \Delta$ colores. Si $i < n$, (1) dice que hay al menos un vecino POSTERIOR a x_i, por lo tanto $\Gamma(x_i) \cap \{x_1, ..., x_{i-1}\} \neq \Gamma(x_i)$. Asi, tenemos que

$$|\Gamma(x_i) \cap \{x_1, ..., x_{i-1}\}| < |\Gamma(x_i)| = d(x_i) \leq \Delta$$

por lo tanto, nos sobra al menos un color para colorear a x_i.

En el caso de $i = n$, tenemos que $d(x_n) = d(x) = \delta < \Delta$, asi tambien nos sobra un color. ($\delta < \Delta$ pues estamos suponiendo que G no es regular)

Con lo cual hemos visto que en este caso, Greedy con ese orden colorea G con $\leq \Delta$ colores.

Observemos que solo usamos la hipotesis de no regularidad para colorear el ultimo vertice. Es decir, este mismo algoritmo permite colorear todo el grafo G, salvo a lo sumo un vertice, con Δ colores.

Caso B: G es regular

Caso B1: $\Delta = 1$: Entonces $G = K_2$, lo cual contradice la hipotesis.

Caso B2: $\Delta = 2$: Entonces G debe ser un ciclo, y como no puede ser un ciclo impar, debe ser un ciclo par, asi que $\chi(G) = 2 = \Delta$.

Caso B3: $\Delta \geq 3$**:** este es el caso mas complicado: Sea $x \in V$. Como observamos en la parte A, podemos colorear a $H = G - x$ con Δ colores. Por la hipotesis de regularidad, debemos tener $\Gamma(x) = \{x_1, x_2, \ldots, x_\Delta\}$.

Caso B3A: Existe algún coloreo de H con Δ colores tal que en $\{x_1, ..., x_\Delta\}$ tiene MENOS de Δ colores.

En este caso, coloreo x con el color que "falta" en $\{x_1, ..., x_\Delta\}$ y tenemos un coloreo con Δ colores de G. Queda entonces el caso mas dificil, que en realidad tenemos que ver que no es posible:

Caso B3B: Cualquier coloreo de H con $\leq \Delta$ colores es tal que $\{x_1, ..., x_\Delta\}$ tiene Δ colores distintos.

Dado $W \subseteq V$ el subgrafo generado por W (usualmente denotado por $G[W]$) es aquel subgrafo de G que tiene como conjunto de vertices a W y como lados aquellos lados de G cuyos extremos estan en W:

$$G[W] = (W, \{xy : x, y \in W, xy \in E(G)\})$$

Dado un coloreo c de H, sea $H^c_{i,j}$ el subgrafo de H generado por los vertices de color $c(x_i)$ o $c(x_j)$. (esto se llaman las *cadenas de Kempe*, la idea fue usada por primera vez en la prueba (fallida) de Kempe del teorema de 4 colores. Posteriormente fueron usadas para probar (bien) el teorema de 5 colores, el teorema de Brooks y el teorema de Vizing, entre otros). Dado un vertice z, denotaremos:

$$\mathrm{cc}_{H^c_{i,j}}(z) = \text{componente conexa de } H^c_{i,j} \text{ que tiene a } z$$

Propiedad 1. Para todo coloreo c de H, $\forall\ i \neq j : \mathrm{cc}_{H^c_{i,j}}(x_i) = \mathrm{cc}_{H^c_{i,j}}(x_j)$

Prueba:*Supongamos que no. Sean i, j tal que $\mathrm{cc}_{H^c_{i,j}}(x_i) \neq \mathrm{cc}_{H^c_{i,j}}(x_j)$. Podemos crear un nuevo coloreo $\tilde{c}$ intercambiando los colores $c(x_i)$ y $c(x_j)$ en $\mathrm{cc}_{H^c_{i,j}}(x_i)$, y esto no cambiará el color de ningun otro vertice, en particular, $\tilde{c}(x_j) = c(x_j)$, pues estamos suponiendo que $x_j \notin \mathrm{cc}_{H^c_{i,j}}(x_i)$. Pero el color de x_i si fue cambiado: se intercambio con el color de x_j, es decir, $\tilde{c}(x_i) = c(x_j)$. Por lo tanto, $\tilde{c}$ colorea $\{x_1, ..., x_\Delta\}$ con solo $\Delta - 1$ colores, contradiciendo la hipotesis del caso B3B en el cual estamos. Fin prueba Prop.1.*

Habiendo probado la propiedad 1., podemos simplificar la notación un poco: puesto que $\mathrm{cc}_{H^c_{i,j}}(x_i) = \mathrm{cc}_{H^c_{i,j}}(x_j)$ denotaremos ese conjunto como $K^c_{i,j}$, sin peligro de confusiòn.

Propiedad 2. Si c es un coloreo con Δ colores de H y w es un vertice de H tal que en $\Gamma(w)$ hay a lo sumo $\Delta - 2$ colores, puedo cambiarle el color a w, obteniendo otro coloreo con Δ colores de H

Prueba:*Bajo la hipotesis, en $\{w\} \cup \Gamma(w)$ hay a lo sumo $\Delta - 1$ colores, por lo tanto se le puede dar el color que "sobra" a w, cambiandole el que tiene. Fin prueba P.2*

Propiedad 3. Para todo coloreo c de H, $K^c_{i,j}$ es un CAMINO entre x_i y x_j.

Prueba: *Supongamos que no. Esto implica que, o bien alguno de x_i o x_j tiene al menos dos vecinos en $K^c_{i,j}$, o bien existe un vertice $u \in K^c_{i,j}$ distinto de x_i y x_j que tiene al menos tres vecinos en $K^c_{i,j}$.*

Consideremos primero que pasaria si x_i tuviese dos vecinos. Como x_i es vecino de x en G, entonces en $H = G - x$ el grado de x_i es uno menos, es decir, x_i tiene $\Delta - 1$ vecinos en H. Si tuviese dos vecinos en $K^c_{i,j}$, entonces esos vecinos tendrian que tener color $c(x_j)$, es decir, el mismo color. En resumen, x_i tiene (en H) $\Delta - 1$ vecinos, y al menos dos tienen el mismo color, por lo tanto en $\Gamma(x_i)$ hay a lo sumo $\Delta - 2$ colores, por lo que podemos cambiarle el color a x_i. Pero entonces tendria un coloreo tal que en $\{x_1, ..., x_\Delta\}$ habria menos de Δ colores, contradiciendo la hipotesis B3B.

Asi pues, x_i (y x_j) tiene un solo vecino en $K^c_{i,j}$.

Por lo que, si $K^c_{i,j}$ no es camino, debemos tener un vertice u distinto de x_i, x_j con al menos tres vecinos en $K^c_{i,j}$. Pero u tiene Δ vecinos en H, y al menos tres de ellos tienen el mismo color, por lo tanto $\Gamma(u)$ tiene a lo sumo $\Delta - 2$ colores, y puedo cambiarle el color a u. Pero en este nuevo coloreo, ahora x_j no esta en la misma componente conexa que x_i, contradiciendo la prop.1. Fin prueba prop. 3.

Propiedad 4. Para todo coloreo c, si $j \neq k$, $K^c_{i,j} \cap K^c_{i,k} = \{x_i\}$.

Prueba: *Supongamos que no. Entonces existe* $u \in K^c_{i,j} \cap K^c_{i,j}$ *con* $u \neq x_i$. *Pero:*

$$\left.\begin{array}{l} u \in K^c_{i,j} \Rightarrow c(u) \in \{c(x_i), c(x_j)\} \\ u \in K^c_{i,k} \Rightarrow c(u) \in \{c(x_i), c(x_k)\} \end{array}\right\} \Rightarrow c(u) = c(x_i)$$

Por lo tanto, como el color de u *es el color de* x_i, *entonces* u *tiene dos vecinos de color* $c(x_j)$ *y dos vecinos de color* $c(x_k)$. *Entonces,* $\Gamma(u)$ *tiene a lo sumo* $\Delta - 2$ *colores, y podemos recolorear* u. *Pero como* u *estaba en el camino de colores* $c(x_i)$ *y* $c(x_j)$ *entre* x_i *y* x_j, *al cambiarle el color, en el nuevo coloreo,* x_i *y* x_j *quedan desconectados, contradiciendo la propiedad 1. Fin prop. 4*

Ahora podemos terminar el teorema:

Sean $i \neq j$ y sea u el (unico) vecino de x_i en $K^c_{i,j}$. Al ser vecino de x_i no puede tener su color, asi que por estar en $K^c_{i,j}$, debe ser:

$$c(u) = c(x_j) \qquad (*)$$

Como $\Delta \geq 3$, existe un vertice x_k con $k \neq i, j$. Intercambiemos los colores en $K^c_{i,k}$, llamando al nuevo coloreo $\tilde{c}$.

Tenemos que $\tilde{c}(x_i) = c(x_k)$. Pero, por la propiedad 4., $K^c_{i,j} \cap K^c_{i,j} = \{x_i\}$, es decir, $K^c_{i,j} - \{x_i\} \cap K^c_{i,k} = \emptyset$ y por lo tanto los colores de $K^c_{i,j} - \{x_i\}$ no cambian. En particular, $\tilde{c}(x_j) = c(x_j)$ y $\tilde{c}(u) = c(u) = c(x_j)$ (la ultima igualdad por $(*)$), es decir:

$$\tilde{c}(u) = \tilde{c}(x_j)$$

Como u sigue siendo vecino de x_i, concluimos que:

$$u \textbf{ debe estar en } K^{\tilde{c}}_{i,j} \qquad (U)$$

Por otro lado, como dijimos, los colores de $K^c_{i,j} - \{x_i\}$ no cambian. Los colores de sus elementos son todos $c(x_i)$ o $c(x_j)$. Pero $c(x_i) = \tilde{c}(x_k)$, y ya vimos que $c(x_j) = \tilde{c}(x_j)$. Asi, los colores de todos los vertices de $K^c_{i,j} - \{x_i\}$ son $\tilde{c}(x_k)$ o $\tilde{c}(x_j)$. Pero entonces tenemos que $K^c_{i,j} - \{x_i\} \subseteq K^{\tilde{c}}_{j,k}$. En particular, tenemos que $u \in K^{\tilde{c}}_{j,k}$. Esto, junto con (U) dice que $u \in K^{\tilde{c}}_{i,j} \cap K^{\tilde{c}}_{j,k}$. Por la propiedad 4, esto implica que $u = x_j$. Pero u era vecino de x_i, asi que deducimos que:

$$x_i x_j \in E \quad \forall\, i \neq j$$

Por lo tanto, el grafo $\tilde{G} = G[x, x_1, x_2, \ldots, x_\Delta]$ es un grafo completo.

Pero $d_{\tilde{G}}(x_i) = \Delta = d_G(x_i)$, y $d_{\tilde{G}}(x) = \Delta = d_G(x)$, es decir, los vertices de $\tilde{G}$ no estan unidos con ningun otro vertice fuera de $\tilde{G}$. Esto dice que $\tilde{G}$ es una componente conexa de G. Como G es conexo, deducimos que $\tilde{G} = G$ lo cual diria que G es completo, contradiciendo la hipotesis del teorema. Fin Brooks.