

## Complejidad y correctitud de Wave

Observemos que Wave es correcto, pues comienza con un preflujo bloqueante, y luego va eliminando los desbalanceos hasta obtener un flujo, y siempre mantiene el invariante de que todos los preflujos intermedios son bloqueantes, por lo tanto al final de todo se obtiene un flujo bloqueante.

Observemos tambien que cada INCREASEFLOW, o bien deja todos los vertices balanceados (y por lo tanto sera el ultimo que hagamos), o bien bloquea un nuevo vertice, pues si un vertice no se balancea durante INCREASEFLOW, se bloquea. Por lo tanto, el numero total de INCREASEFLOWs es de a lo sumo  $(n - 2) + 1$ . ( $n - 2$  porque ese es el numero total de vertices distintos de  $s, t$ , y el  $+1$  es porque el ultimo puede ser que no bloquee a nadie). Con lo cual tenemos terminacion finita. Pero, veamos la complejidad mas en detalle:

Al igual que en MKM, denotemos  $(\ )_s$  la parte del algoritmo en la cual estamos saturando lados. Excepto que aca tambien denotara la parte del algoritmo en la cual estamos volviendo 0 un flujo por un lado. (i.e., cuando devolvemos la TOTALIDAD del flujo mandado por un lado).

Observar que cada lado se satura  $\overrightarrow{UNA}$  sola vez. Puede des-saturarse luego, pero en este caso no se usa mas, porque solo des-saturamos el lado  $\overrightarrow{xy}$  si  $y$  esta bloqueado, y en ese caso  $\overrightarrow{xy}$  no se usara mas.

Asimismo, solo volvemos 0 flujo ya enviado por una lado una sola vez, porque, otra vez, esto solo se produce en  $\overrightarrow{xy}$  si  $y$  esta bloqueado. Por lo tanto,  $(Wave)_s = O(m)$ .

Denotemos por  $(\ )_p$  la parte del algoritmo en la cual trabajamos parcialmente en un lado, i.e., mandamos flujo sin saturarlo, o restamos flujo sin volverlo 0.

Supongamos que hay en total  $r$  iteraciones "INCREASEFLOW-DECREASEFLOW". (Arriba vimos que debe ser  $r \leq n - 1$ ).

Entonces  $(Wave)_p = \sum_{i=1}^r ((ID)(i))_p$  donde  $ID(i)$  es el  $i$ -esimo "INCREASEFLOW-DECREASEFLOW".

Pero, a su vez, cada INCREASEFLOW esta compuesto de  $n - 2$  FORWARDBALANCE( $x$ )s y cada DECREASEFLOW esta compuesto de  $n - 2$  BACKWARDBALANCE( $x$ )s.

Pero en cada FORWARDBALANCE, saturamos todos los lados que usamos, excepto tal vez por uno. Por lo tanto  $(FORWARDBALANCE(x))_p = O(1)$  para cada  $x$ , y por lo tanto  $(INCREASEFLOW)_p = O(n)$ . Similarmente para DECREASEFLOW, por lo tanto  $(ID(i))_p = O(n) + O(n) = O(n)$ , y asi  $(Wave)_p = \sum_{i=1}^r ((ID)(i))_p = O(rn) = O(n^2)$ .

Por lo tanto  $Wave = O(m) + O(n^2) = O(n^2)$ .

Esto en cuanto al paso de saturacion de Wave. Como siempre, multiplicamos por  $n$  para obtener la compeljidad total, por lo tanto:

COMPLEJIDAD TOTAL DE WAVE =  $O(n^3)$ .