MATEMATICA DISCRETA II-2007
PRACTICO 7:Códigos

I): Se tiene un código binario de longitud 8 tal que la distancia minima entre palabras es 5. Dar una cota superior para el numero de palabras del código.

II): ¿Existe un codigo de longitud 10 que corrija 3 errores?

III): Probar que cualquier código binario con parametros $(23, 11, 7)$ es perfecto.

IV): Probar que si C es un código binario perfecto que corrije un error, entonces debe existir r tal que C tiene longitud $2^r - 1$ y $2^{2^r - r - 1}$ elementos.

V): Sea

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y sea C el codigo generado por G.

a) ¿Cual es la longitud de C? Cual es su dimensión?

b)Supongamos que desea mandar el mensaje 10101 11010 01101. ¿Cuales son las palabras del codigo que deberia usar para mandar el mensaje?

b) Dar una matriz de chequeo de C.

c)Cuantos errores puede detectar o correjir el codigo generado por G?

d) Supongamos que se recibe la palabra 100111001. ¿ Cual es la palabra mas probable que se haya mandado? ¿A que mensaje corresponde?

e) ¿ Que puede concluir si recibe la palabra 001111010? ¿ y si recibe la palabra 011100011?

VI): Sea H la matriz de chequeo:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y sea C el código asociado a ella.

a) Describir C explicitamente (es decir, dar las palabras que constituyen el código).

b) Suponga que Ud. recibe la palabra 00111000. Asumiendo que se produjo a lo sumo un error de transmisión, ¿que palabra le fue enviada?

c) Ud. recibe la palabra 11100111. ¿ Que puede concluir?

VII): Sea H la matriz de chequeo:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y sea C el código asociado a ella.

a) Escribir 5 palabras que esten en C. ¿Cuantas palabras tiene en total C?

b) Suponga que Ud. recibe la palabra 11100000000011. Asumiendo que se produjo a lo sumo un error de transmisión, ¿que palabra le fue enviada?

VIII): Una consultora realizara 100 preguntas a la poblacion. Cada pregunta tendra 3 respuestas (SI, NO, y NO SE). La compañia quiere codificar esta informacion. (por lo tanto, los datos a codificar son cosas del tipo "Pregunta 97, respuesta SI, o "pregunta 32, respuesta NO SE). La encuestadora desea que el codigo sea capaz de corregir un error por dato y que codifique todos los datos posibles.

a) Diseñe un codigo LINEAL que satisfaga esto. (No hace falta dar todas las palabras, basta con dar la matriz de chequeo, o bien la generadora)

b) Escriba dos palabras que esten en su codigo.

c) En su codigo, ¿ es posible asignarle el codigo "00...001" (los puntos suspensivos denotan todos ceros) al dato "97SI"?

d) Tome una de sus palabras de b), y cambiele los dos primeros digitos. Suponga que esa es la palabra que se recibe. Prediga que deducira la persona que la recibe, de acuerdo con el codigo diseñado por Ud. Explique bien porque.

IX): Una empresa necesita codificar un millón de palabras. Desea que el código sea capaz de corregir un error.

a) Supongamos que Ud. desea diseñar un codigo LINEAL por medio de una matriz de chequeo que satisfaga esto. ¿ Cual es el menor tamaño que debe tener la matriz?

b) Escriba una matriz que satisfaga las condiciones, del tamaño dado en a).

c) Escriba dos palabras de peso menor o igual a 6 que esten en su código y una palabra de peso mayor o igual a 15 que este en su codigo.

d) Tome una de sus palabras de b), y cambiele los dos primeros digitos. (si es un 1, escriba 0 y viceversa) Suponga que esa es la palabra que se recibe. Prediga que deducirá la persona que la recibe, de acuerdo con el codigo diseñado por Ud. Explique bien por qué.

X): Estoy pensando en un número natural entre 1 y 2048. Ud debe deducir el número, haciendome a lo sumo 15 preguntas cuyas unicas respuestas posibles sean "Si" o "No", y teniendo en cuenta que yo puedo mentirle una vez.

XI): a) Calcular la probabilidad de mandar un mensaje de 1 Megabyte sin errores a traves de un canal en donde la probabilidad de que un simple bit sea transmitido incorrectamente sea de 0.001 %

b) Supongamos ahora que Ud. usa el codigo de Hamming de 15 bits (es decir, $\mathcal{H}_4$). Calcule la probabilidad de que el mensaje se decodifique correctamente.

XII): Vimos que los códigos de Hamming son perfectos, y que cualquier código binario perfecto que corrija un error debe tener los mismos parametros del Hamming. ¿Existe alguno que no sea Hamming? ¿Alguno no lineal? La respuesta es si: en este ejercicio, construiremos un código **no lineal** con los mismos parametros del Hamming, asi que será perfecto: Dado un $r \geq 2$, sea $n = 2^r - 1$, sea C el código:

$$C = \{(x, x \oplus w, x_1 \oplus ... \oplus x_n \oplus (w_1 \vee ... \vee w_n)) | x \in \boldsymbol{Z}_2^n, w \in \mathcal{H}_r\}$$

a) Probar que la longitud de C es $2^{r+1} - 1$.

b) Probar que C tiene $2^{2^{r+1}-(r+1)-1}$ elementos.

c) Por a) y b), si se prueba que $\delta = 3$, entonces C tendra los mismos parametros que $\mathcal{H}_{r+1}$ y será perfecto. Probar que $\delta = 3$. (damos una ayuda, pero lo puede probar como quiera)

c1) Probar que $0 \in C$.

c2) Dar un $\alpha \in C$ con $d(\alpha, 0) = 3$. (esto y c1) prueba que $\delta \leq 3$).

c3) Probar que $\delta \geq 3$ probando que $d(\alpha, \beta) \geq 3 \forall \alpha, \beta \in C$, observando que si $\alpha = (x, x \oplus w, x_1 \oplus ... \oplus x_n \oplus (w_1 \vee ... \vee w_n))$ y $\beta = (y, y \oplus v, y_1 \oplus ... \oplus y_n \oplus (v_1 \vee ... \vee v_n))$, entonces se pueden hacer los siguientes casos:

c3i) $x \neq y$, $w = v$, $x_1 \oplus ... \oplus x_n = y_1 \oplus ... \oplus y_n$

c3ii) $x \neq y$, $w = v$, $x_1 \oplus ... \oplus x_n \neq y_1 \oplus ... \oplus y_n$.

c3iii) $x = y$, $w \neq v$.

c3iv) $x \neq y$,$w \neq v$, $x \oplus w = y \oplus v$.

c3v) $x \neq y$,$w \neq v$, $d(x \oplus w, y \oplus v) \geq 2$.

c3vi) $x \neq y$,$w \neq v$, $d(x \oplus w, y \oplus v) = 1$.

d) Probar que C no es lineal.