

3. Implemente un algoritmo que calcule la descomposición LU de una matriz. Aplique este algoritmo para resolver el sistema $Ax = b$ donde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 6 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad y \quad b = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -14 \end{bmatrix}.$$

4. Sea A definida positiva. Probar que A admite una única descomposición $A = LDL^T$, con L triangular inferior unitaria y D diagonal con elementos positivos.
5. Sea A una matriz simétrica definida positiva, con $a_{1,1} \neq 0$. Suponga que A ha sido reducida a la forma

$$\left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right] A^{(1)}$$

efectuando sólo operaciones por fila. Pruebe que $A^{(1)}$ es simétrica. ¿Qué ventajas tiene esto cuando se efectúa eliminación gaussiana de A ?

6. Escribir un algoritmo que realice la descomposición LDL^T de una matriz simétrica y definida positiva A .
7. Para resolver la siguiente integral en forma exacta se descompone el integrando en fracciones simples:

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)^2(x^2+1)} dx.$$

Para esto, se deben calcular 6 coeficientes A_i , $i = 1, \dots, 6$. Utilice descomposición LU para calcularlos.

8. Utilice $PA = LU$ de la matriz A :

$$\begin{bmatrix} 2 & 10 & 8 & 8 & 6 \\ 1 & 4 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 3 & 10 & 9 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Use esta descomposición para resolver el sistema lineal $Ax = b$, para los siguientes vectores independientes:

$$b = \begin{bmatrix} 52 \\ 14 \\ 12 \\ 51 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 50 \\ 4 \\ 12 \\ 48 \\ 12 \end{bmatrix} .$$

9. Sea A una matriz no singular de orden n . Describa un procedimiento para calcular A^{-1} que realice menos de n^4 flops. Cuento el número de operaciones del procedimiento propuesto. (Ayuda: resolver n sistemas lineales mediante eliminación gaussiana con pivoteo parcial.) Programe este procedimiento y aplíquelo a las matrices de los ejercicios anteriores.
10. Se desea resolver el sistema $A^k x = b$, con A matriz de orden n y $k \in \mathbb{N}$. Describir un procedimiento para resolver el sistema planteado que realice menos de $k * n^3$. Cuento el número de operaciones que realiza el procedimiento propuesto.