Superálgebras de Lie contragradientes de crecimiento finito y reflexiones impares

Florencia Orosz Hunziker

Tafí del Valle, Tucumán

22 de Marzo de 2013

Introducción

Una superálgebra es un álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$,

Introducción

Una superálgebra es un álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$, (si $a \in A_\alpha, b \in A_\beta$ entonces $ab \in A_{\alpha+\beta}$ para $\alpha, \beta \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$).

Introducción

Una superálgebra es un álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$, (si $a \in A_\alpha, b \in A_\beta$ entonces $ab \in A_{\alpha+\beta}$ para $\alpha, \beta \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$).

Una superálgebra de Lie es una superálgebra $g = g_{\bar{0}} \oplus g_{\bar{1}}$ con una multiplicación que denotamos por [,] que satisface:

Introducción

Una superálgebra es un álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$, (si $a \in A_\alpha, b \in A_\beta$ entonces $ab \in A_{\alpha+\beta}$ para $\alpha, \beta \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$).

Una superálgebra de Lie es una superálgebra $g = g_{\bar{0}} \oplus g_{\bar{1}}$ con una multiplicación que denotamos por [,] que satisface:

$[a, b] = -(-1)^{\alpha\beta}[b, a]$

Introducción

Una superálgebra es un álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$, (si $a \in A_\alpha, b \in A_\beta$ entonces $ab \in A_{\alpha+\beta}$ para $\alpha, \beta \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$).

Una superálgebra de Lie es una superálgebra $g = g_{\bar{0}} \oplus g_{\bar{1}}$ con una multiplicación que denotamos por $[\ ,\ ]$ que satisface:

$$[a, b] = -(-1)^{\alpha\beta}[b, a]$$

$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{\alpha\beta}[b, [a, c]]$$

para $a \in g_\alpha,\ b \in g_\beta$.

Introducción

Una superálgebra es un álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$, (si $a \in A_\alpha, b \in A_\beta$ entonces $ab \in A_{\alpha+\beta}$ para $\alpha, \beta \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$).

Una superálgebra de Lie es una superálgebra $g = g_{\bar{0}} \oplus g_{\bar{1}}$ con una multiplicación que denotamos por [,] que satisface:

$[a, b] = -(-1)^{\alpha\beta}[b, a]$

$[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{\alpha\beta}[b, [a, c]]$

para $a \in g_\alpha,\ b \in g_\beta$.

Diremos que $P(a) = \alpha$ si $a \in g_\alpha$.

Equivalentemente, una superálgebra de Lie puede definirse como una tríada de objetos:

Equivalentemente, una superálgebra de Lie puede definirse como una tríada de objetos:

Un álgebra de Lie $g_{\bar{0}}$,

Equivalentemente, una superálgebra de Lie puede definirse como una tríada de objetos:

Un álgebra de Lie $g_{\bar{0}}$, un $g_{\bar{0}}$- módulo $g_{\bar{1}}$

Equivalentemente, una superálgebra de Lie puede definirse como una tríada de objetos:

Un álgebra de Lie $g_{\bar{0}}$, un $g_{\bar{0}}$- módulo $g_{\bar{1}}$ y un morfismo de $g_{\bar{0}}$-módulos

$$\phi : S^2 g_{\bar{1}} \longrightarrow g_{\bar{0}}$$

que satisface

$$\phi(a, b)c + \phi(b, c)a + \phi(c, a)b = 0$$

para $a, b, c \in g_{\bar{1}}$.

Definición

Decimos que una superálgebra de Lie $g = g_{\bar{0}} \oplus g_{\bar{1}}$ es clásica si es simple y el $g_{\bar{0}}$-módulo $g_{\bar{1}}$ es completamente reducible.

Motivación original

Motivación original

Encontrar una prueba del teorema de clasificación de las superálgebras de Lie clásicas de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$ usando la clasificación de las superálgebras de Lie contragradientes de crecimiento finito.

[Kac]

Teorema (Teorema de Clasificación)

Una superálegbra de Lie clásica de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$ es isomorfa a un álgebra de Lie simple $A_n, B_n, ..., G_2$ o a una de las superálgebras $A(m,n), B(m,n), C(n), D(m,n), D(2,1;\alpha)$ con $\alpha \neq 0, -1$, $F(4), G(3), P(n)$ o $Q(n)$.

Dificultades principales

Dificultades principales

- Sólo una parte de las superálgebras de Lie clásicas son contragradientes.

Dificultades principales

- Sólo una parte de las superálgebras de Lie clásicas son contragradientes.
- Una superálgebra de Lie contragradiente puede tener muchas matrices de Cartan y diagramas asociados.

Dificultades principales

• Sólo una parte de las superálgebras de Lie clásicas son contragradientes.

• Una superálgebra de Lie contragradiente puede tener muchas matrices de Cartan y diagramas asociados.

• La clasificación de superálgebras de Lie contragradientes de crecimiento finito sobre $\mathbb{C}$ expuesta por Kac, Van de Leur, Serganova y Hoyt se basa fuertemente en el teorema de clasificación que originalmente queríamos abordar.

Motivación secundaria

Motivación secundaria

Entender cuales son las dificulades para dar una prueba alternativa en el caso de las superálgebras de Lie clásicas básicas, que son las que admiten una forma bilineal par invariante no degenerada.

Clasificación

Clasificación

- Kac clasificó las superálgebras de Lie contragradientes de crecimiento finito sin raíces isotrópicas.

Clasificación

- Kac clasificó las superálgebras de Lie contragradientes de crecimiento finito sin raíces isotrópicas.
- Van de Leur clasicó las superálgebras de Lie contragradientes de crecimiento finito con matriz simetrizable.

Clasificación

• Kac clasificó las superálgebras de Lie contragradientes de crecimiento finito sin raíces isotrópicas.

• Van de Leur clasicó las superálgebras de Lie contragradientes de crecimiento finito con matriz simetrizable.

• Serganova y Hoyt clasificaron las superálgebras de Lie contragradientes de crecimiento finito con matriz elemental indescomponible y describieron un algoritmo para obtener todas las matrices de Cartan que definen a la misma superálgebra de Lie de Kac-Moody. Terminaron también la clasificación de las superálgebras de Lie contragradientes de crecimiento finito.

Superálgebras de Lie Contragradientes

Superálgebras de Lie Contragradientes

Sea $I = \{1, ..., n\}$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ una matriz de rango L, $\tau \subset I$.

Superálgebras de Lie Contragradientes

Sea $I = \{1, ..., n\}$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ una matriz de rango L, $\tau \subset I$.

Tomamos un espacio vectorial $\mathbf{h}$ de dimensión

$$n + corank(A) = 2n - L$$

Superálgebras de Lie Contragradientes

Sea $I = \{1, ..., n\}$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ una matriz de rango L, $\tau \subset I$.

Tomamos un espacio vectorial $\mathbf{h}$ de dimensión
$$n + corank(A) = 2n - L$$

funcionales linealmente independientes $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbf{h}^\star$

Superálgebras de Lie Contragradientes

Sea $I = \{1, ..., n\}$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ una matriz de rango L, $\tau \subset I$.

Tomamos un espacio vectorial $\mathbf{h}$ de dimensión

$$n + corank(A) = 2n - L$$

funcionales linealmente independientes $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbf{h}^\star$

$h_1, ..., h_n \in \mathbf{h}$ tal que $\alpha_j(h_i) = a_{ij}$.

Superálgebras de Lie Contragradientes

Sea $I = \{1, ..., n\}$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ una matriz de rango L, $\tau \subset I$.

Tomamos un espacio vectorial $\mathbf{h}$ de dimensión

$$n + corank(A) = 2n - L$$

funcionales linealmente independientes $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbf{h}^{\star}$

$h_1, ..., h_n \in \mathbf{h}$ tal que $\alpha_j(h_i) = a_{ij}$.

Definimos $\hat{g}(A, \tau)$ como la superálgebra de Lie con generadores $X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n$, el espacio vectorial $\mathbf{h}$ y las relaciones

Superálgebras de Lie Contragradientes

Sea $I = \{1, \ldots, n\}$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ una matriz de rango L, $\tau \subset I$.

Tomamos un espacio vectorial $\mathbf{h}$ de dimensión

$$n + corank(A) = 2n - L$$

funcionales linealmente independientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{h}^\star$

$h_1, \ldots, h_n \in \mathbf{h}$ tal que $\alpha_j(h_i) = a_{ij}$.

Definimos $\hat{g}(A, \tau)$ como la superálgebra de Lie con generadores $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$, el espacio vectorial $\mathbf{h}$ y las relaciones

$$[h, X_i] = \alpha_i(h) X_i$$
$$[h, Y_i] = -\alpha_i(h) Y_i$$
$$[X_i, Y_j] = \delta_{ij} h_i$$
$$[h, k] = 0$$

para $h, k \in \mathbf{h}$.

Superálgebras de Lie Contragradientes

Sea $I = \{1, ..., n\}$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ una matriz de rango L, $\tau \subset I$.

Tomamos un espacio vectorial $\mathbf{h}$ de dimensión

$$n + corank(A) = 2n - L$$

funcionales linealmente independientes $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbf{h}^\star$

$$h_1, ..., h_n \in \mathbf{h} \text{ tal que } \alpha_j(h_i) = a_{ij}.$$

Definimos $\hat{g}(A, \tau)$ como la superálgebra de Lie con generadores $X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n$, el espacio vectorial $\mathbf{h}$ y las relaciones

$$[h, X_i] = \alpha_i(h)X_i$$
$$[h, Y_i] = -\alpha_i(h)Y_i$$
$$[X_i, Y_j] = \delta_{ij}h_i$$
$$[h, k] = 0$$

para $h, k \in \mathbf{h}$.

$P(X_i) = P(Y_i) = 1$ si $i \in \tau$ y $P(X_i) = P(Y_i) = 0$ si $i \notin \tau$.

Teorema

Teorema

a) Si denotamos por n_+ (respectivamente n_-) a la subsuperálgebra en $\hat{g}(A, \tau)$ generada por $X_1, ..., X_n$ (respectivamente $Y_1, ..., Y_n$), entonces como espacios vectoriales

Teorema

a) Si denotamos por n_+ (respectivamente n_-) a la subsuperálgebra en $\hat{g}(A,\tau)$ generada por $X_1, ..., X_n$ (respectivamente $Y_1, ..., Y_n$), entonces como espacios vectoriales

$$\hat{g}(A,\tau) = n_+ \oplus \mathbf{h} \oplus n_-.$$

Teorema

a) *Si denotamos por n_+ (respectivamente n_-) a la subsuperálgebra en $\hat{g}(A,\tau)$ generada por $X_1, ..., X_n$ (respectivamente $Y_1, ..., Y_n$), entonces como espacios vectoriales*

$$\hat{g}(A,\tau) = n_+ \oplus \mathbf{h} \oplus n_-.$$

b) *n_+ y n_- son libres en $X_1, ..., X_n$ y en $Y_1, ..., Y_n$ respectivamente.*

Teorema

a) Si denotamos por n_+ *(respectivamente* n_-*) a la subsuperálgebra en* $\hat{g}(A,\tau)$ *generada por* $X_1, \ldots, X_n$ *(respectivamente* $Y_1, \ldots, Y_n$*), entonces como espacios vectoriales*

$$\hat{g}(A,\tau) = n_+ \oplus \mathbf{h} \oplus n_-.$$

b) n_+ *y* n_- *son libres en* $X_1, \ldots, X_n$ *y en* $Y_1, \ldots, Y_n$ *respectivamente.*

c) El mapa $X_i \to -(-1)^{P(i)} Y_i$*,* $Y_i \to -X_i$ *y* $h \to -h$ *para* $h \in \mathbf{h}$ *admite una única extensión a un automorfismo* $\hat{w}$ *que tiene orden 4 si* $\tau \neq \phi$ *y 2 si* $\tau = \phi$*.*

Teorema

a) Si denotamos por n_+ (respectivamente n_-) a la subsuperálgebra en $\hat{g}(A,\tau)$ generada por $X_1, ..., X_n$ (respectivamente $Y_1, ..., Y_n$), entonces como espacios vectoriales

$$\hat{g}(A,\tau) = n_+ \oplus \mathbf{h} \oplus n_-.$$

b) n_+ y n_- son libres en $X_1, ..., X_n$ y en $Y_1, ..., Y_n$ respectivamente.

c) El mapa $X_i \to -(-1)^{P(i)} Y_i$, $Y_i \to -X_i$ y $h \to -h$ para $h \in \mathbf{h}$ admite una única extensión a un automorfismo $\hat{w}$ que tiene orden 4 si $\tau \neq \phi$ y 2 si $\tau = \phi$.

Denotamos $Q = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i$ a lo que llamaremos el retículo de raíces,

Denotamos $Q = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i$ a lo que llamaremos el retículo de raíces, $Q_+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_+\alpha_i$.

Denotamos $Q = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i$ a lo que llamaremos el retículo de raíces, $Q_+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_+\alpha_i$.

d) Con respecto a **h** se tiene la siguiente descomposición en espacios de raíces:

Denotamos $Q = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i$ a lo que llamaremos el retículo de raíces, $Q_+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_+\alpha_i$.

d) Con respecto a $\mathbf{h}$ se tiene la siguiente descomposición en espacios de raíces:

$$\hat{g}(A,\tau) = \oplus_{\alpha\in Q_+^*}\hat{g}_\alpha \oplus \mathbf{h} \oplus_{\alpha\in Q_+^*} \hat{g}_{-\alpha}$$

Denotamos $Q = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i$ a lo que llamaremos el retículo de raíces, $Q_+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_+\alpha_i$.

d) Con respecto a **h** se tiene la siguiente descomposición en espacios de raíces:

$$\hat{g}(A,\tau) = \oplus_{\alpha\in Q_+^*}\hat{g}_\alpha \oplus \mathbf{h} \oplus_{\alpha\in Q_+^*} \hat{g}_{-\alpha}$$

donde $\hat{g}_\alpha = \{x \in \hat{g}(A,\tau) | [h,x] = \alpha(h)x \text{ para todo } h \in \mathbf{h}\}$.

Denotamos $Q = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i$ a lo que llamaremos el retículo de raíces, $Q_+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_+\alpha_i$.

d) Con respecto a **h** se tiene la siguiente descomposición en espacios de raíces:

$$\hat{g}(A,\tau) = \oplus_{\alpha \in Q_+^*} \hat{g}_\alpha \oplus \mathbf{h} \oplus_{\alpha \in Q_+^*} \hat{g}_{-\alpha}$$

donde $\hat{g}_\alpha = \{x \in \hat{g}(A,\tau) | [h,x] = \alpha(h)x \text{ para todo } h \in \mathbf{h}\}$. Además, $dim \hat{g}_\alpha < \infty$ y $\hat{g}_\alpha \subset n_\pm$ para $\pm\alpha \in Q_+$.

Denotamos $Q = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i$ a lo que llamaremos el retículo de raíces, $Q_+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_+\alpha_i$.

d) Con respecto a **h** se tiene la siguiente descomposición en espacios de raíces:

$$\hat{g}(A,\tau) = \oplus_{\alpha \in Q_+^*} \hat{g}_\alpha \oplus \mathbf{h} \oplus_{\alpha \in Q_+^*} \hat{g}_{-\alpha}$$

donde $\hat{g}_\alpha = \{x \in \hat{g}(A,\tau) | [h,x] = \alpha(h)x \text{ para todo } h \in \mathbf{h}\}$. Además, $dim \hat{g}_\alpha < \infty$ y $\hat{g}_\alpha \subset n_\pm$ para $\pm\alpha \in Q_+$.

e) $\hat{g}(A,\tau)$ admite una $\mathbb{Z}$-graduación

Denotamos $Q = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i$ a lo que llamaremos el retículo de raíces, $Q_+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_+\alpha_i$.

d) Con respecto a **h** se tiene la siguiente descomposición en espacios de raíces:

$$\hat{g}(A,\tau) = \oplus_{\alpha \in Q_+^*} \hat{g}_\alpha \oplus \mathbf{h} \oplus_{\alpha \in Q_+^*} \hat{g}_{-\alpha}$$

donde $\hat{g}_\alpha = \{x \in \hat{g}(A,\tau) | [h,x] = \alpha(h)x \text{ para todo } h \in \mathbf{h}\}$. Además, $dim \hat{g}_\alpha < \infty$ y $\hat{g}_\alpha \subset n_\pm$ para $\pm\alpha \in Q_+$.

e) $\hat{g}(A,\tau)$ admite una $\mathbb{Z}$-graduación

$$\hat{g}(A,\tau) = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \hat{g}_i$$

Denotamos $Q = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i$ a lo que llamaremos el retículo de raíces, $Q_+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_+\alpha_i$.

d) Con respecto a **h** se tiene la siguiente descomposición en espacios de raíces:

$$\hat{g}(A,\tau) = \oplus_{\alpha \in Q_+^*} \hat{g}_\alpha \oplus \mathbf{h} \oplus_{\alpha \in Q_+^*} \hat{g}_{-\alpha}$$

donde $\hat{g}_\alpha = \{x \in \hat{g}(A,\tau) | [h,x] = \alpha(h)x \text{ para todo } h \in \mathbf{h}\}$. Además, $dim\hat{g}_\alpha < \infty$ y $\hat{g}_\alpha \subset n_\pm$ para $\pm\alpha \in Q_+$.

e) $\hat{g}(A,\tau)$ admite una $\mathbb{Z}$-graduación

$$\hat{g}(A,\tau) = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \hat{g}_i$$

donde

$$\hat{g}_0 = \mathbf{h}, \quad \text{y para } i > 0 \quad \hat{g}_i = \oplus_{ht\alpha = i} \hat{g}_\alpha, \quad \hat{g}_{-i} = \oplus_{ht\alpha = i} \hat{g}_{-\alpha}$$

Denotamos $Q = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i$ a lo que llamaremos el retículo de raíces, $Q_+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_+\alpha_i$.

d) Con respecto a **h** se tiene la siguiente descomposición en espacios de raíces:

$$\hat{g}(A,\tau) = \oplus_{\alpha \in Q_+^*} \hat{g}_\alpha \oplus \mathbf{h} \oplus_{\alpha \in Q_+^*} \hat{g}_{-\alpha}$$

donde $\hat{g}_\alpha = \{x \in \hat{g}(A,\tau) | [h,x] = \alpha(h)x \text{ para todo } h \in \mathbf{h}\}$. Además, $dim \hat{g}_\alpha < \infty$ y $\hat{g}_\alpha \subset n_\pm$ para $\pm\alpha \in Q_+$.

e) $\hat{g}(A,\tau)$ admite una $\mathbb{Z}$-graduación

$$\hat{g}(A,\tau) = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \hat{g}_i$$

donde

$$\hat{g}_0 = \mathbf{h}, \quad \text{y para } i > 0 \quad \hat{g}_i = \oplus_{ht\alpha = i} \hat{g}_\alpha, \quad \hat{g}_{-i} = \oplus_{ht\alpha = i} \hat{g}_{-\alpha}$$

si consideramos $ht\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i$ para $\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i$.

Denotamos $Q = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i$ a lo que llamaremos el retículo de raíces, $Q_+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_+\alpha_i$.

d) Con respecto a **h** se tiene la siguiente descomposición en espacios de raíces:

$$\hat{g}(A,\tau) = \oplus_{\alpha \in Q_+^*} \hat{g}_\alpha \oplus \mathbf{h} \oplus_{\alpha \in Q_+^*} \hat{g}_{-\alpha}$$

donde $\hat{g}_\alpha = \{x \in \hat{g}(A,\tau) | [h,x] = \alpha(h)x \text{ para todo } h \in \mathbf{h}\}$. Además, $dim\hat{g}_\alpha < \infty$ y $\hat{g}_\alpha \subset n_\pm$ para $\pm\alpha \in Q_+$.

e) $\hat{g}(A,\tau)$ admite una $\mathbb{Z}$-graduación

$$\hat{g}(A,\tau) = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \hat{g}_i$$

donde

$$\hat{g}_0 = \mathbf{h}, \quad \text{y para } i > 0 \quad \hat{g}_i = \oplus_{ht\alpha = i} \hat{g}_\alpha, \quad \hat{g}_{-i} = \oplus_{ht\alpha = i} \hat{g}_{-\alpha}$$

si consideramos $ht\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i$ para $\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i$.

f) Existe un único ideal maximal r que intersecta trivialmente a **h**. Más aún

Denotamos $Q = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i$ a lo que llamaremos el retículo de raíces, $Q_+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_+\alpha_i$.

d) Con respecto a **h** se tiene la siguiente descomposición en espacios de raíces:

$$\hat{g}(A,\tau) = \oplus_{\alpha \in Q_+^*} \hat{g}_\alpha \oplus \mathbf{h} \oplus_{\alpha \in Q_+^*} \hat{g}_{-\alpha}$$

donde $\hat{g}_\alpha = \{x \in \hat{g}(A,\tau) | [h,x] = \alpha(h)x \text{ para todo } h \in \mathbf{h}\}$. Además, $dim \hat{g}_\alpha < \infty$ y $\hat{g}_\alpha \subset n_\pm$ para $\pm\alpha \in Q_+$.

e) $\hat{g}(A,\tau)$ admite una $\mathbb{Z}$-graduación

$$\hat{g}(A,\tau) = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \hat{g}_i$$

donde

$$\hat{g}_0 = \mathbf{h}, \quad \text{y para } i > 0 \quad \hat{g}_i = \oplus_{ht\alpha = i} \hat{g}_\alpha, \quad \hat{g}_{-i} = \oplus_{ht\alpha = i} \hat{g}_{-\alpha}$$

si consideramos $ht\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i$ para $\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i$.

f) Existe un único ideal maximal r que intersecta trivialmente a **h**. Más aún

$$r = (r \cap n_-) \oplus (r \cap n_+) \quad \text{(suma directa de ideales).}$$

Definición

Definición

Una superálgebra de Lie contragradiente $g(A, \tau)$ es el cociente

Definición

Una superálgebra de Lie contragradiente $g(A,\tau)$ es el cociente

$$g(A,\tau) = \hat{g}(A,\tau)/r.$$

Como en el caso de la superálgebra $\hat{g}(A,\tau)$ también tenemos una descomposición en espacios de raíces de $g(A,\tau)$ con respecto a $\mathbf{h}$:

Como en el caso de la superálgebra $\hat{g}(A,\tau)$ también tenemos una descomposición en espacios de raíces de $g(A,\tau)$ con respecto a $\mathbf{h}$:

$$g(A,\tau) = \oplus_{\alpha\in Q} g_\alpha.$$

Como en el caso de la superálgebra $\hat{g}(A, \tau)$ también tenemos una descomposición en espacios de raíces de $g(A, \tau)$ con respecto a **h**:

$$g(A, \tau) = \oplus_{\alpha \in Q} g_\alpha.$$

donde $g_\alpha = \{x \in g(A, \tau) | [h, x] = \alpha(h)x \text{ para todo } h \in \mathbf{h}\}$.

Por la independencia lineal de $\alpha_1, ..., \alpha_n$ no tenemos raíces nulas, luego $g_0 = \mathbf{h}$.

Por la independencia lineal de $\alpha_1, ..., \alpha_n$ no tenemos raíces nulas, luego $g_0 = \mathbf{h}$.
Si $\alpha \neq 0$ y $g_\alpha \neq 0$ entonces α es una raíz de multiplicidad $m(\alpha) = dimg_\alpha$.

Por la independencia lineal de $\alpha_1, ..., \alpha_n$ no tenemos raíces nulas, luego $g_0 = \mathbf{h}$.
Si $\alpha \neq 0$ y $g_\alpha \neq 0$ entonces α es una raíz de multiplicidad $m(\alpha) = dim g_\alpha$.
Denotamos con Δ al conjunto de raíces. Definimos las raíces positivas $\Delta_+ = \Delta \cap Q_+$

Por la independencia lineal de $\alpha_1, ..., \alpha_n$ no tenemos raíces nulas, luego $g_0 = \mathbf{h}$.
Si $\alpha \neq 0$ y $g_\alpha \neq 0$ entonces α es una raíz de multiplicidad $m(\alpha) = dim g_\alpha$.
Denotamos con Δ al conjunto de raíces. Definimos las raíces positivas $\Delta_+ = \Delta \cap Q_+$ y las negativas $\Delta_- = \Delta \cap -Q_+$.

Por la independencia lineal de $\alpha_1, ..., \alpha_n$ no tenemos raíces nulas, luego $g_0 = \mathbf{h}$.
Si $\alpha \neq 0$ y $g_\alpha \neq 0$ entonces α es una raíz de multiplicidad $m(\alpha) = dim g_\alpha$.
Denotamos con Δ al conjunto de raíces. Definimos las raíces positivas $\Delta_+ = \Delta \cap Q_+$ y las negativas $\Delta_- = \Delta \cap -Q_+$. Se tiene la unión disjunta

$$\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-.$$

Notemos que si $\alpha \in \Delta_+$ entonces g_α es el espacio vectorial generado linealmente por elementos de la forma

Notemos que si $\alpha \in \Delta_+$ entonces g_α es el espacio vectorial generado linealmente por elementos de la forma $[X_{i_1}, [X_{i_2}, ...X_{i_s}]$ tal que $\alpha_{i_1} + ... + \alpha_{i_s} = \alpha$.

Notemos que si $\alpha \in \Delta_+$ entonces g_α es el espacio vectorial generado linealmente por elementos de la forma $[X_{i_1}, [X_{i_2}, ... X_{i_s}]$ tal que $\alpha_{i_1} + ... + \alpha_{i_s} = \alpha$.
Luego, podemos reescribir

$$g(A, \tau) = n_- \oplus \mathbf{h} \oplus n_+, \text{ donde } n_\pm = \oplus_{\alpha \in \Delta_\pm} g_\alpha.$$

Por el teorema anterior, el ideal $r \subset \hat{g}(A, \tau)$ es $\hat{w}$-invariante.

Por el teorema anterior, el ideal $r \subset \hat{g}(A, \tau)$ es $\hat{w}$-invariante. Luego $\hat{w}$ induce un automorfismo w de orden 4 o 2 en la superálgebra de Lie $g(A, \tau)$ llamado automorfismo de Cartan.

Por el teorema anterior, el ideal $r \subset \hat{g}(A,\tau)$ es $\hat{w}$-invariante. Luego $\hat{w}$ induce un automorfismo w de orden 4 o 2 en la superálgebra de Lie $g(A,\tau)$ llamado automorfismo de Cartan. Está determinado por

$$w(X_i) = -(-1)^{P(i)} Y_i, \quad w(Y_i) = -X_i \text{ y } w(h) = -h \text{ para } h \in \mathbf{h}.$$

Por el teorema anterior, el ideal $r \subset \hat{g}(A, \tau)$ es $\hat{w}$-invariante. Luego $\hat{w}$ induce un automorfismo w de orden 4 o 2 en la superálgebra de Lie $g(A, \tau)$ llamado automorfismo de Cartan. Está determinado por

$$w(X_i) = -(-1)^{P(i)} Y_i, \quad w(Y_i) = -X_i \text{ y } w(h) = -h \text{ para } h \in \mathbf{h}.$$

Puesto que $w(g_\alpha) = g_{-\alpha}$, tenemos que $m(\alpha) = m(-\alpha)$ y $\Delta_- = -\Delta_+$.

Por la homogeneidad de los elementos X_i, Y_i respecto de la $\mathbb{Z}_2$ graduación y por la independencia lineal de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se sigue que los espacios de raíces g_α son homogéneos, i.e., están contenidos sólo en uno de los espacios vectoriales $g(A, \tau)_{\bar{0}}$ o $g(A, \tau)_{\bar{1}}$.

Por la homogeneidad de los elementos X_i, Y_i respecto de la $\mathbb{Z}_2$ graduación y por la independencia lineal de $\alpha_1, ..., \alpha_n$ se sigue que los espacios de raíces g_α son homogéneos, i.e., están contenidos sólo en uno de los espacios vectoriales $g(A,\tau)_{\bar{0}}$ o $g(A,\tau)_{\bar{1}}$.

Denotamos $\Delta_{\bar{0}} = \{\alpha \in \Delta |\ g_\alpha \subseteq g(A,\tau)_{\bar{0}}\}$ y

Por la homogeneidad de los elementos X_i, Y_i respecto de la $\mathbb{Z}_2$ graduación y por la independencia lineal de $\alpha_1, ..., \alpha_n$ se sigue que los espacios de raíces g_α son homogéneos, i.e., están contenidos sólo en uno de los espacios vectoriales $g(A,\tau)_{\bar{0}}$ o $g(A,\tau)_{\bar{1}}$.

Denotamos $\Delta_{\bar{0}} = \{\alpha \in \Delta |\ g_\alpha \subseteq g(A,\tau)_{\bar{0}}\}$ y $\Delta_{\bar{1}} = \{\alpha \in \Delta |\ g_\alpha \subseteq g(A,\tau)_{\bar{1}}\}$ a los conjuntos de raíces pares e impares respectivamente.

Por la homogeneidad de los elementos X_i, Y_i respecto de la $\mathbb{Z}_2$ graduación y por la independencia lineal de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se sigue que los espacios de raíces g_α son homogéneos, i.e., están contenidos sólo en uno de los espacios vectoriales $g(A,\tau)_{\bar{0}}$ o $g(A,\tau)_{\bar{1}}$.

Denotamos $\Delta_{\bar{0}} = \{\alpha \in \Delta |\ g_\alpha \subseteq g(A,\tau)_{\bar{0}}\}$ y $\Delta_{\bar{1}} = \{\alpha \in \Delta |\ g_\alpha \subseteq g(A,\tau)_{\bar{1}}\}$ a los conjuntos de raíces pares e impares respectivamente.

Tenemos entonces la unión disjunta

$$\Delta = \Delta_{\bar{0}} \cup \Delta_{\bar{1}}.$$

Superálgebras de Lie de Kac-Moody

Superálgebras de Lie de Kac-Moody

Diremos que una matriz A es una matriz generalizada de Cartan si A satisface las siguientes condiciones para todo $i, j \in I$:

Superálgebras de Lie de Kac-Moody

Diremos que una matriz A es una matriz generalizada de Cartan si A satisface las siguientes condiciones para todo $i, j \in I$:

1) $a_{ij} = 0$ implica $a_{ji} = 0$.
2) $a_{ii} = 0$ implica $P(i) = 1$.
3) $a_{ii} \neq 0$ implica $2a_{ij}/a_{ii} \in \mathbb{Z}_-$ para $i \neq j$.
4) $a_{ii} \neq 0$ y $P(i) = 1$ implica $a_{ij}/a_{ii} \in \mathbb{Z}_-$ para $i \neq j$.

Definición

Una superálgebra de Lie contragradiente $g(A, \tau)$ es una superálgebra de Lie de Kac-Moody si A es una matriz generalizada de Cartan.

Definición

Una superálgebra de Lie contragradiente $g(A, \tau)$ es una superálgebra de Lie de Kac-Moody si A es una matriz generalizada de Cartan.

Proposición

Los operadores adX_i, adY_i son localmente nilpotentes en una superálgebra de Kac-Moody.

Resultados preliminares,definiciones y propiedades

Resultados preliminares,definiciones y propiedades

Si $B = DA$ con D una matriz diagonal inversible entonces $g(A) \simeq g(B)$.

Resultados preliminares,definiciones y propiedades

Si $B = DA$ con D una matriz diagonal inversible entonces $g(A) \simeq g(B)$.

Por ello asumiremos sin pérdida de generalidad que $a_{ii} \in \{0, 2\}$.

Resultados preliminares,definiciones y propiedades

Si $B = DA$ con D una matriz diagonal inversible entonces $g(A) \simeq g(B)$.

Por ello asumiremos sin pérdida de generalidad que $a_{ii} \in \{0, 2\}$.

Si $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ son las raíces simples de $g(A)$ denotamos $a_{\alpha\beta}$ con $\alpha = \alpha_i$, $\beta = \alpha_j$ a a_{ij}.

Es inmediato ver que las posibilidades para cada raíz simple $\alpha = \alpha_i$ son cuatro:

Es inmediato ver que las posibilidades para cada raíz simple $\alpha = \alpha_i$ son cuatro:

1) $a_{\alpha\alpha} = 2$ y $P(i) = 0$.

Es inmediato ver que las posibilidades para cada raíz simple $\alpha = \alpha_i$ son cuatro:

1) $a_{\alpha\alpha} = 2$ y $P(i) = 0$. Este es el caso clásico, en el que X_i, Y_i, h_i generan una subálgebra isomorfa a $sl(2)$.

Es inmediato ver que las posibilidades para cada raíz simple $\alpha = \alpha_i$ son cuatro:

1) $a_{\alpha\alpha} = 2$ y $P(i) = 0$. Este es el caso clásico, en el que X_i, Y_i, h_i generan una subálgebra isomorfa a $sl(2)$.

2) $a_{\alpha\alpha} = 0$ y $P(i) = 0$.

Es inmediato ver que las posibilidades para cada raíz simple $\alpha = \alpha_i$ son cuatro:

1) $a_{\alpha\alpha} = 2$ y $P(i) = 0$. Este es el caso clásico, en el que X_i, Y_i, h_i generan una subálgebra isomorfa a $sl(2)$.

2) $a_{\alpha\alpha} = 0$ y $P(i) = 0$. En este caso X_i, Y_i, h_i generan una subálgebra isomorfa al álgebra de Heisenberg.

Es inmediato ver que las posibilidades para cada raíz simple $\alpha = \alpha_i$ son cuatro:

1) $a_{\alpha\alpha} = 2$ y $P(i) = 0$. Este es el caso clásico, en el que X_i, Y_i, h_i generan una subálgebra isomorfa a $sl(2)$.

2) $a_{\alpha\alpha} = 0$ y $P(i) = 0$. En este caso X_i, Y_i, h_i generan una subálgebra isomorfa al álgebra de Heisenberg.

3) $a_{\alpha\alpha} = 2$ y $P(i) = 1$.

Es inmediato ver que las posibilidades para cada raíz simple $\alpha = \alpha_i$ son cuatro:

1) $a_{\alpha\alpha} = 2$ y $P(i) = 0$. Este es el caso clásico, en el que X_i, Y_i, h_i generan una subálgebra isomorfa a $sl(2)$.

2) $a_{\alpha\alpha} = 0$ y $P(i) = 0$. En este caso X_i, Y_i, h_i generan una subálgebra isomorfa al álgebra de Heisenberg.

3) $a_{\alpha\alpha} = 2$ y $P(i) = 1$. En este caso X_i, Y_i, h_i generan una sub (super)álgebra isomorfa a $osp(1|2)$ y $2\alpha_i$ es raíz.

Es inmediato ver que las posibilidades para cada raíz simple $\alpha = \alpha_i$ son cuatro:

1) $a_{\alpha\alpha} = 2$ y $P(i) = 0$. Este es el caso clásico, en el que X_i, Y_i, h_i generan una subálgebra isomorfa a $sl(2)$.

2) $a_{\alpha\alpha} = 0$ y $P(i) = 0$. En este caso X_i, Y_i, h_i generan una subálgebra isomorfa al álgebra de Heisenberg.

3) $a_{\alpha\alpha} = 2$ y $P(i) = 1$. En este caso X_i, Y_i, h_i generan una sub (super)álgebra isomorfa a $osp(1|2)$ y $2\alpha_i$ es raíz.

4) $a_{\alpha\alpha} = 0$ y $P(i) = 1$.

Es inmediato ver que las posibilidades para cada raíz simple $\alpha = \alpha_i$ son cuatro:

1) $a_{\alpha\alpha} = 2$ y $P(i) = 0$. Este es el caso clásico, en el que X_i, Y_i, h_i generan una subálgebra isomorfa a $sl(2)$.

2) $a_{\alpha\alpha} = 0$ y $P(i) = 0$. En este caso X_i, Y_i, h_i generan una subálgebra isomorfa al álgebra de Heisenberg.

3) $a_{\alpha\alpha} = 2$ y $P(i) = 1$. En este caso X_i, Y_i, h_i generan una sub (super)álgebra isomorfa a $osp(1|2)$ y $2\alpha_i$ es raíz.

4) $a_{\alpha\alpha} = 0$ y $P(i) = 1$. En este caso $[X_i, X_i] = [Y_i, Y_i] = 0$ y X_i, Y_i, h_i generan una subálgebra isomorfa a $sl(1|1)$.

Es inmediato ver que las posibilidades para cada raíz simple $\alpha = \alpha_i$ son cuatro:

1) $a_{\alpha\alpha} = 2$ y $P(i) = 0$. Este es el caso clásico, en el que X_i, Y_i, h_i generan una subálgebra isomorfa a $sl(2)$.

2) $a_{\alpha\alpha} = 0$ y $P(i) = 0$. En este caso X_i, Y_i, h_i generan una subálgebra isomorfa al álgebra de Heisenberg.

3) $a_{\alpha\alpha} = 2$ y $P(i) = 1$. En este caso X_i, Y_i, h_i generan una sub (super)álgebra isomorfa a $osp(1|2)$ y $2\alpha_i$ es raíz.

4) $a_{\alpha\alpha} = 0$ y $P(i) = 1$. En este caso $[X_i, X_i] = [Y_i, Y_i] = 0$ y X_i, Y_i, h_i generan una subálgebra isomorfa a $sl(1|1)$.

En el último caso decimos que α es isotrópica y por definición una raíz isotrópica es impar.

Es inmediato ver que las posibilidades para cada raíz simple $\alpha = \alpha_i$ son cuatro:

1) $a_{\alpha\alpha} = 2$ y $P(i) = 0$. Este es el caso clásico, en el que X_i, Y_i, h_i generan una subálgebra isomorfa a $sl(2)$.

2) $a_{\alpha\alpha} = 0$ y $P(i) = 0$. En este caso X_i, Y_i, h_i generan una subálgebra isomorfa al álgebra de Heisenberg.

3) $a_{\alpha\alpha} = 2$ y $P(i) = 1$. En este caso X_i, Y_i, h_i generan una sub (super)álgebra isomorfa a $osp(1|2)$ y $2\alpha_i$ es raíz.

4) $a_{\alpha\alpha} = 0$ y $P(i) = 1$. En este caso $[X_i, X_i] = [Y_i, Y_i] = 0$ y X_i, Y_i, h_i generan una subálgebra isomorfa a $sl(1|1)$.

En el último caso decimos que α es isotrópica y por definición una raíz isotrópica es impar. En los otros casos decimos que la raíz es no isotrópica.

Una raíz simple es regular

Una raíz simple es regular si para toda otra raíz simple β, $a_{\alpha\beta} = 0$ implica $a_{\beta\alpha} = 0$. Si α no es regular, la llamamos singular.

Lema

Para un subconjunto $J \subset I$, sea A_J la subsuperálgebra generada en $g(A)$ por $\mathbf{h}, X_i, Y_i$ para $i \in J$.

Lema

Para un subconjunto $J \subset I$, sea A_J la subsuperálgebra generada en $g(A)$ por $\mathbf{h}, X_i, Y_i$ para $i \in J$. Entonces, A_J es isomorfa a $\mathbf{h}^* \oplus g(A_J)$ donde $A_J = (a_{ij})_{i,j \in J}$ y $\mathbf{h}^*$ es un subespacio de $\mathbf{h}$.

Lema

Para un subconjunto $J \subset I$, sea A_J la subsuperálgebra generada en $g(A)$ por $\mathbf{h}, X_i, Y_i$ para $i \in J$. Entonces, A_J es isomorfa a $\mathbf{h}^* \oplus g(A_J)$ donde $A_J = (a_{ij})_{i,j\,\in J}$ y $\mathbf{h}^*$ es un subespacio de $\mathbf{h}$.Más precisamente, $\mathbf{h}^*$ es un subespacio maximal en $\cap_{i\in J} Ker\ \alpha_i$ que intersecta trivialmente al espacio generado por $\{h_i\}_{i\in J}$.

Una superálgebra de Lie contragradiente $g = g(A)$ tiene una $\mathbb{Z}$-graduación natural

Una superálgebra de Lie contragradiente $g = g(A)$ tiene una $\mathbb{Z}$-graduación natural

$$g = \bigoplus g_i$$

Una superálgebra de Lie contragradiente $g = g(A)$ tiene una $\mathbb{Z}$-graduación natural

$$g = \bigoplus g_i$$

donde $g_0 := \mathbf{h}$ y $g_1 := g_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus g_{\alpha_n}$.

Una superálgebra de Lie contragradiente $g = g(A)$ tiene una $\mathbb{Z}$-graduación natural

$$g = \bigoplus g_i$$

donde $g_0 := \mathbf{h}$ y $g_1 := g_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus g_{\alpha_n}$.

Esta graduación se llama principal.

Decimos que g tiene crecimiento finito

Decimos que g tiene crecimiento finito si la dimensión de g_n crece polinomialmente en n.

Decimos que g tiene crecimiento finito si la dimensión de g_n crece polinomialmente en n.

Esto es, si $\lim_{n\to\infty} \left(log \left(\sum_{i=-n}^{n} dimg_i \right) / log(n) \right) < \infty$

Corolario

Si $g(A)$ es de crecimiento finito, entonces para todo conjunto $J \subset I$, la superálgebra de Lie $g(A_J)$ es de crecimiento finito.

A se dice indescomponible si el conjunto I no puede descomponerse en dos conjuntos J, K tales que $a_{jk} = a_{kj} = 0$ para $j \in J$ y $k \in K$.

A se dice indescomponible si el conjunto I no puede descomponerse en dos conjuntos J, K tales que $a_{jk} = a_{kj} = 0$ para $j \in J$ y $k \in K$.

Diremos que A es elemental si no contiene filas nulas. En caso contrario, diremos que A es no elemental.

Integrabilidad y crecimiento finito

Integrabilidad y crecimiento finito

Diremos que $g(A)$ es integrable

Integrabilidad y crecimiento finito

Diremos que $g(A)$ es integrable si adX_i es localmente nilpotente para todo $i \in I$.

Integrabilidad y crecimiento finito

Diremos que $g(A)$ es integrable si adX_i es localmente nilpotente para todo $i \in I$. En este caso Y_i también resulta localmente nilpotente para todo $i \in I$.

Proposición

Sea $g(A,\tau)$ integrable y A elemental, indescomponible con $n \geq 2$.

Proposición

Sea $g(A,\tau)$ integrable y A elemental, indescomponible con $n \geq 2$. Entonces, luego de reescalar las filas de A se satisfacen las siguientes condiciones:

Proposición

Sea $g(A, \tau)$ integrable y A elemental, indescomponible con $n \geq 2$. Entonces, luego de reescalar las filas de A se satisfacen las siguientes condiciones:

1) $a_{ii} = 0$ *o* $a_{ii} = 2$ *para* $i \in I$.

Proposición

Sea $g(A,\tau)$ integrable y A elemental, indescomponible con $n \geq 2$. Entonces, luego de reescalar las filas de A se satisfacen las siguientes condiciones:

1) $a_{ii} = 0$ o $a_{ii} = 2$ para $i \in I$.

2) Si $a_{ii} = 0$ entonces $P(i) = 1$.

Proposición

Sea $g(A, \tau)$ integrable y A elemental, indescomponible con $n \geq 2$. Entonces, luego de reescalar las filas de A se satisfacen las siguientes condiciones:

1) $a_{ii} = 0$ o $a_{ii} = 2$ para $i \in I$.

2) Si $a_{ii} = 0$ entonces $P(i) = 1$.

3) Si $a_{ii} = 2$ entonces $a_{ij} \in 2^{P(i)}\mathbb{Z}_{-}$.

Proposición

Sea $g(A,\tau)$ integrable y A elemental, indescomponible con $n \geq 2$. Entonces, luego de reescalar las filas de A se satisfacen las siguientes condiciones:

1) $a_{ii} = 0$ o $a_{ii} = 2$ para $i \in I$.

2) Si $a_{ii} = 0$ entonces $P(i) = 1$.

3) Si $a_{ii} = 2$ entonces $a_{ij} \in 2^{P(i)}\mathbb{Z}_{-}$.

4) Si $a_{ij} = 0$ y $a_{ji} \neq 0$ entonces $a_{ii} = 0$.

Si $a_{ii} = 0$ y $P(i) = 0$, entonces h_i, X_i, Y_i generan una subálgebra de Heisenberg l.

Si $a_{ii} = 0$ y $P(i) = 0$, entonces h_i, X_i, Y_i generan una subálgebra de Heisenberg l. Por ser A elemental, existe j tal que $a_{ij} \neq 0$.

Si $a_{ii} = 0$ y $P(i) = 0$, entonces h_i, X_i, Y_i generan una subálgebra de Heisenberg l. Por ser A elemental, existe j tal que $a_{ij} \neq 0$. Luego Y_j genera el l-módulo irreducible de dimensión infinita con carga central $-a_{ij}$. Luego $(adY_i)^m Y_j \neq 0$ para todo $m > 0$ lo que contradice el hecho de que $g(A)$ es integrable.

Si $a_{ii} = 2$ y $P(i) = 0$, entonces h_i, X_i, Y_i generan una subálgebra isomorfa a $sl(2)$.

Si $a_{ii} = 2$ y $P(i) = 0$, entonces h_i, X_i, Y_i generan una subálgebra isomorfa a $sl(2)$. Cualquier Y_j genera un l-submódulo M con peso máximo $-a_{ij}$.

Si $a_{ii} = 2$ y $P(i) = 0$, entonces h_i, X_i, Y_i generan una subálgebra isomorfa a $sl(2)$. Cualquier Y_j genera un l-submódulo M con peso máximo $-a_{ij}$. Como adY_i es localmente nilpotente, este submódulo debe ser de dimensión finita. Esto implica $-a_{ij} \in \mathbb{Z}_+$, i.e. $a_{ij} \in \mathbb{Z}_-$.

Si $a_{ii} = 2$ y $P(i) = 1$, entonces h_i, X_i, Y_i generan una subálgebra isomorfa a $osp(1,2)$.

Si $a_{ii} = 2$ y $P(i) = 1$, entonces h_i, X_i, Y_i generan una subálgebra isomorfa a $osp(1,2)$. Cualquier Y_j genera un l-submódulo M con peso máximo $-\frac{1}{2}a_{ij}$.

Si $a_{ii} = 2$ y $P(i) = 1$, entonces h_i, X_i, Y_i generan una subálgebra isomorfa a $osp(1,2)$. Cualquier Y_j genera un I-submódulo M con peso máximo $-\frac{1}{2}a_{ij}$. Como adY_i es localmente nilpotente, este submódulo debe ser de dimensión finita.

Si $a_{ii} = 2$ y $P(i) = 1$, entonces h_i, X_i, Y_i generan una subálgebra isomorfa a $osp(1,2)$. Cualquier Y_j genera un l-submódulo M con peso máximo $-\frac{1}{2}a_{ij}$. Como adY_i es localmente nilpotente, este submódulo debe ser de dimensión finita. Esto implica $-\frac{1}{2}a_{ij} \in \mathbb{Z}_+$, i.e. $a_{ij} \in 2\mathbb{Z}_-$.

Para probar la última afirmación de la proposición supongamos que $a_{ii} = 2$, $a_{ij} = 0$ y $a_{ji} \neq 0$.

Para probar la última afirmación de la proposición supongamos que $a_{ii} = 2$, $a_{ij} = 0$ y $a_{ji} \neq 0$. Entonces Y_j genera un $sl(2)$-módulo de peso máximo 0. Luego M es el $sl(2)$-módulo trivial o un módulo de Verma.

Para probar la última afirmación de la proposición supongamos que $a_{ii} = 2$, $a_{ij} = 0$ y $a_{ji} \neq 0$. Entonces Y_j genera un $sl(2)$-módulo de peso máximo 0. Luego M es el $sl(2)$-módulo trivial o un módulo de Verma. Por ser adY_i localmente nilpotente, M es el $sl(2)$-módulo trivial. Luego $[Y_i, Y_j] = 0$.

Para probar la última afirmación de la proposición supongamos que $a_{ii} = 2$, $a_{ij} = 0$ y $a_{ji} \neq 0$. Entonces Y_j genera un $sl(2)$-módulo de peso máximo 0. Luego M es el $sl(2)$-módulo trivial o un módulo de Verma. Por ser adY_i localmente nilpotente, M es el $sl(2)$-módulo trivial. Luego $[Y_i, Y_j] = 0$. Pero

$$[X_j, [Y_i, Y_j]] = \pm[H_j, Y_i] = \pm a_{ji} Y_i \neq 0$$

Para probar la última afirmación de la proposición supongamos que $a_{ii} = 2$, $a_{ij} = 0$ y $a_{ji} \neq 0$. Entonces Y_j genera un $sl(2)$-módulo de peso máximo 0. Luego M es el $sl(2)$-módulo trivial o un módulo de Verma. Por ser adY_i localmente nilpotente, M es el $sl(2)$-módulo trivial. Luego $[Y_i, Y_j] = 0$. Pero

$$[X_j, [Y_i, Y_j]] = \pm[H_j, Y_i] = \pm a_{ji} Y_i \neq 0$$

por lo que llegamos a una contradicción.

Nos interesa demostrar el siguiente resultado:

Nos interesa demostrar el siguiente resultado:

Teorema

Sea A una matriz elemental.

Nos interesa demostrar el siguiente resultado:

Teorema

Sea A una matriz elemental. Si $g(A)$ tiene crecimiento finito, entonces $g(A)$ es integrable.

Nos interesa demostrar el siguiente resultado:

Teorema

Sea A una matriz elemental. Si $g(A)$ tiene crecimiento finito, entonces $g(A)$ es integrable.

Para probar este teorema necesitamos una serie de lemas.

Lema (1)

Sea $n = 2$ y $a_{12}a_{21} \neq 0$. Si adX_1 no actúa nilpotentemente en X_2, entonces $g(A)$ tiene crecimiento infinito.

DEMOSTRACÓN

A es simetrizable, por lo que $g(A)$ admite una forma bilineal invariante $(\ ,\ )$. Por hipótesis tenemos que $(adX_1)^m X_2 \neq 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}_+$.

DEMOSTRACÓN

A es simetrizable, por lo que $g(A)$ admite una forma bilineal invariante $(\ ,\ )$. Por hipótesis tenemos que $(adX_1)^m X_2 \neq 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}_+$. Tomamos para $k \in \mathbb{Z}_+$

DEMOSTRACÓN

A es simetrizable, por lo que $g(A)$ admite una forma bilineal invariante $(\ ,\ )$. Por hipótesis tenemos que $(adX_1)^m X_2 \neq 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}_+$. Tomamos para $k \in \mathbb{Z}_+$

$$
\begin{aligned}
E_k &= (adX_1)^{3k} X_2, \\
F_k &= (adY_1)^{3k} Y_2, \\
H_k &= [E_k, F_k], \\
\beta_k &= 3k\alpha_1 + \alpha_2.
\end{aligned}
$$

Analizando los casos posibles es inmediato ver que $\beta_k - \beta_l \notin \Delta$ si $k \neq l$.

Analizando los casos posibles es inmediato ver que $\beta_k - \beta_l \notin \Delta$ si $k \neq l$. Luego, tenemos que

$$[E_k, F_l] = \delta_{kl} H_k.$$

Si I es la sub(super)álgebra generada por H_k, E_k, F_k con $k \in \mathbb{Z}_+$

Si I es la sub(super)álgebra generada por H_k, E_k, F_k con $k \in \mathbb{Z}_+$ entonces se demuestra que I tiene crecimiento infinito.

Si I es la sub(super)álgebra generada por H_k, E_k, F_k con $k \in \mathbb{Z}_+$ entonces se demuestra que I tiene crecimiento infinito. Para ello, primero se ve que existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que

Si I es la sub(super)álgebra generada por H_k, E_k, F_k con $k \in \mathbb{Z}_+$ entonces se demuestra que I tiene crecimiento infinito. Para ello, primero se ve que existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$(\beta_{k_1}, \beta_{k_2} + \ldots + \beta_{k_r}) \neq 0$$

Si I es la sub(super)álgebra generada por H_k, E_k, F_k con $k \in \mathbb{Z}_+$ entonces se demuestra que I tiene crecimiento infinito. Para ello, primero se ve que existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$(\beta_{k_1}, \beta_{k_2} + \ldots + \beta_{k_r}) \neq 0$$

para toda secuencia $k \leq k_1 < \ldots < k_r$ usando el suguiente lema técnico.

Lema

Sea V un espacio vectorial de dimensión 2 que admite un producto bilineal no nulo simétrico.

Lema

Sea V un espacio vectorial de dimensión 2 que admite un producto bilineal no nulo simétrico. Para dos vectores $v, w \in V$ tales que $(v, w) \neq 0$, existe $k > 0$ y $c \in \mathbb{C}$ tal que

Lema

Sea V un espacio vectorial de dimensión 2 que admite un producto bilineal no nulo simétrico. Para dos vectores $v, w \in V$ tales que $(v, w) \neq 0$, existe $k > 0$ y $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$Re(v + pw, v + qw) > 0$$

para todo $p, q \geq k$.

Usando que

Usando que $(\beta_{k_2} + \ldots + \beta_{k_r})(H_{k_1}) = \lambda(\beta_{k_1}, \beta_{k_2} + \ldots + \beta_{k_r})$

Usando que $(\beta_{k_2} + \ldots + \beta_{k_r})(H_{k_1}) = \lambda(\beta_{k_1}, \beta_{k_2} + \ldots + \beta_{k_r})$ con $\lambda \neq 0$ se sigue que $\beta_{k_2} + \ldots + \beta_{k_r} \neq 0$.

Usando que $(\beta_{k_2} + ... + \beta_{k_r})(H_{k_1}) = \lambda(\beta_{k_1}, \beta_{k_2} + ... + \beta_{k_r})$ con $\lambda \neq 0$ se sigue que $\beta_{k_2} + ... + \beta_{k_r} \neq 0$. Luego, $[F_{k_1}, [E_{k_1}, [E_{k_2} .... E_{k_r}]]] = [H_{k_1}, [E_{k_2} .... E_{k_r}]] = (\beta_{k_2} + ... + \beta_{k_r})(H_{k_1})[E_{k_2} .... E_{k_r}] \neq 0$ si $k \leq k_1 < ... < k_r$.

Usando que $(\beta_{k_2} + \ldots + \beta_{k_r})(H_{k_1}) = \lambda(\beta_{k_1}, \beta_{k_2} + \ldots + \beta_{k_r})$ con $\lambda \neq 0$ se sigue que $\beta_{k_2} + \ldots + \beta_{k_r} \neq 0$. Luego, $[F_{k_1}, [E_{k_1}, [E_{k_2} \ldots . E_{k_r}]]] = [H_{k_1}, [E_{k_2} \ldots . E_{k_r}]] = (\beta_{k_2} + \ldots + \beta_{k_r})(H_{k_1})[E_{k_2} \ldots . E_{k_r}] \neq 0$ si $k \leq k_1 < \ldots < k_r$. Luego, $[E_{k_2}, \ldots E_{k_r}] \neq 0$ y estos conmutadores son linealmente independientes.

Introducimos una $\mathbb{Z}$- graduación en $g(A)$

Introducimos una $\mathbb{Z}$- graduación en $g(A)$

$$deg' X_1 = 1 \quad deg' X_2 = 3.$$

Introducimos una $\mathbb{Z}$- graduación en $g(A)$

$$deg' X_1 = 1 \quad deg' X_2 = 3.$$

Se ve que $deg'[E_{k_1}, ...E_{k_r}] = 3(k_1 + 1) + ... + 3(k_r + 1)$.

Se sigue que $dim\mathfrak{g}(A)'_{3n} \geq f_{k+1}(n)$

Se sigue que $dimg(A)'_{3n} \geq f_{k+1}(n)$ donde $f_{k+1}(n)$ es la cantidad de formas de escribir a n como una suma

Se sigue que $dim\mathfrak{g}(A)'_{3n} \geq f_{k+1}(n)$ donde $f_{k+1}(n)$ es la cantidad de formas de escribir a n como una suma $m_1 + ... + m_r$

Se sigue que $dim\mathfrak{g}(A)'_{3n} \geq f_{k+1}(n)$ donde $f_{k+1}(n)$ es la cantidad de formas de escribir a n como una suma $m_1 + ... + m_r$ con $k+1 \leq m_1 < ... < m_r$.

Se sigue que $dim g(A)'_{3n} \geq f_{k+1}(n)$ donde $f_{k+1}(n)$ es la cantidad de formas de escribir a n como una suma $m_1 + ... + m_r$ con $k+1 \leq m_1 < ... < m_r$. Luego $g(A)$ tiene crecimiento infinito con la nueva $\mathbb{Z}$-graduación.

Se sigue que $dim g(A)'_{3n} \geq f_{k+1}(n)$ donde $f_{k+1}(n)$ es la cantidad de formas de escribir a n como una suma $m_1 + ... + m_r$ con $k + 1 \leq m_1 < ... < m_r$. Luego $g(A)$ tiene crecimiento infinito con la nueva $\mathbb{Z}$-graduación.
Por otro lado, $|deg'(X)| \leq 3|deg(X)|$ para todo X en $g(A)$, por lo que $g(A)$ tiene crecimiento infinito en la graduación principal y el lema queda demostrado.

Lema (2)

Sea $n = 2$, $a_{11} = 2$, $a_{12} = 0$ *y* $a_{21} \neq 0$. *Entonces* $g(A)$ *tiene crecimiento infinito.*

DEMOSTRACÓN

Definimos

DEMOSTRACÓN

Definimos

$$X_{12} = [X_1, X_2], \;\; Y_{12} = \frac{(-1)^{P(1)P(2)}}{a_{21}}[Y_1, Y_2]$$

DEMOSTRACÓN

Definimos

$$X_{12} = [X_1, X_2], \;\; Y_{12} = \frac{(-1)^{P(1)P(2)}}{a_{21}} [Y_1, Y_2]$$

Entonces, se tiene que

DEMOSTRACÓN

Definimos

$$X_{12} = [X_1, X_2], \;\; Y_{12} = \frac{(-1)^{P(1)P(2)}}{a_{21}}[Y_1, Y_2]$$

Entonces, se tiene que

$$[X_{12}, Y_{12}] = [X_1, Y_1] = h_1, \quad [X_{12}, Y_1] = [Y_{12}, X_1] = 0.$$

DEMOSTRACÓN

Definimos

$$X_{12} = [X_1, X_2], \ \ Y_{12} = \frac{(-1)^{P(1)P(2)}}{a_{21}}[Y_1, Y_2]$$

Entonces, se tiene que

$$[X_{12}, Y_{12}] = [X_1, Y_1] = h_1, \ \ [X_{12}, Y_1] = [Y_{12}, X_1] = 0.$$

Luego X_{12}, Y_{12}, X_1, Y_1 y $\mathbf{h}$ generan una subálgebra l isomorfa a un cociente de $\bar{g}(B)$ con $b_{11} = b_{12} = b_{21} = b_{22} = 2$.

DEMOSTRACÓN

Definimos

$$X_{12} = [X_1, X_2], \;\; Y_{12} = \frac{(-1)^{P(1)P(2)}}{a_{21}}[Y_1, Y_2]$$

Entonces, se tiene que

$$[X_{12}, Y_{12}] = [X_1, Y_1] = h_1, \;\;\; [X_{12}, Y_1] = [Y_{12}, X_1] = 0.$$

Luego X_{12}, Y_{12}, X_1, Y_1 y **h** generan una subálgebra I isomorfa a un cociente de $\bar{g}(B)$ con $b_{11} = b_{12} = b_{21} = b_{22} = 2$.
En particular, adX_1 no es nilpotente en X_{12}.

DEMOSTRACÓN

Definimos

$$X_{12} = [X_1, X_2], \;\; Y_{12} = \frac{(-1)^{P(1)P(2)}}{a_{21}}[Y_1, Y_2]$$

Entonces, se tiene que

$$[X_{12}, Y_{12}] = [X_1, Y_1] = h_1, \quad [X_{12}, Y_1] = [Y_{12}, X_1] = 0.$$

Luego X_{12}, Y_{12}, X_1, Y_1 y $\mathbf{h}$ generan una subálgebra I isomorfa a un cociente de $\bar{g}(B)$ con $b_{11} = b_{12} = b_{21} = b_{22} = 2$.
En particular, adX_1 no es nilpotente en X_{12}.
Por el Lema 1, I tiene crecimiento infinito y por lo tanto $g(A)$ tiene crecimiento infinito.

Lema (3)

Sea $n = 3$,

Lema (3)

Sea $n = 3$, $a_{21} = a_{22} = 0$ *y*

Lema (3)

Sea $n = 3$, $a_{21} = a_{22} = 0$ *y* $a_{23} \neq 0$.

Lema (3)

Sea $n = 3$, $a_{21} = a_{22} = 0$ y $a_{23} \neq 0$.
Si adX_1 no actúa de manera nilpotente en X_2, entonces $g(A)$ tiene crecimiento infinito.

DEMOSTRACÓN DEL TEOREMA

Ahora podemos demostrar el Teorema.

DEMOSTRACÓN DEL TEOREMA

Ahora podemos demostrar el Teorema.
Asumamos que adX_i no es localmente nilpotente.

DEMOSTRACÓN DEL TEOREMA

Ahora podemos demostrar el Teorema.
Asumamos que adX_i no es localmente nilpotente.
Entonces adX_i no actúa de forma localmente nilpotente sobre algún X_j.

DEMOSTRACÓN DEL TEOREMA

Ahora podemos demostrar el Teorema.
Asumamos que adX_i no es localmente nilpotente.
Entonces adX_i no actúa de forma localmente nilpotente sobre algún X_j.
Si $a_{ij} = a_{ji} = 0$ entonces $[X_i, X_j] = 0$. Luego $a_{ij} \neq 0$ o $a_{ji} \neq 0$.

Consideramos los siguientes casos:

Consideramos los siguientes casos:

1) Si $a_{ij}a_{ji} \neq 0$, entonces $A_{\{i,j\}}$ satisface las condiciones del Lema 1 y luego $g(A_{\{i,j\}})$ tiene crecimiento infinito.

Consideramos los siguientes casos:

1) Si $a_{ij}a_{ji} \neq 0$, entonces $A_{\{i,j\}}$ satisface las condiciones del Lema 1 y luego $g(A_{\{i,j\}})$ tiene crecimiento infinito.

2) Si $a_{ii} = 2$ y a_{ij} (a_{ji}) entonces $A_{\{i,j\}}$ satisface las condiciones del Lema 2 y luego, $g(A_{\{i,j\}})$ tiene crecimiento infinito.

Consideramos los siguientes casos:

1) Si $a_{ij}a_{ji} \neq 0$, entonces $A_{\{i,j\}}$ satisface las condiciones del Lema 1 y luego $g(A_{\{i,j\}})$ tiene crecimiento infinito.

2) Si $a_{ii} = 2$ y a_{ij} (a_{ji}) entonces $A_{\{i,j\}}$ satisface las condiciones del Lema 2 y luego, $g(A_{\{i,j\}})$ tiene crecimiento infinito.

3) El caso $a_{ii} = a_{ij} = 0$ es imposible ya que eso implicaría $ad^2X_i(X_j) = 0$.

4) Si $a_{ii} = 2$, $a_{ij} \neq 0$, $a_{ji} = a_{jj} = 0$ entonces $a_{jk} \neq 0$ para algún $k \in I$ por ser A elemental. Luego por el Lema 3 $g(A_{\{i,j,k\}})$ tiene crecimiento infinito.

4) Si $a_{ii} = 2$, $a_{ij} \neq 0$, $a_{ji} = a_{jj} = 0$ entonces $a_{jk} \neq 0$ para algún $k \in I$ por ser A elemental. Luego por el Lema 3 $g(A_{\{i,j,k\}})$ tiene crecimiento infinito.

5) Si $a_{ii} = a_{jj} = 2$, $a_{ij} \neq 0$ $a_{ji} = 0$ entonces $A_{\{i,j\}}$ satisface las condiciones del Lema 1 $g(A_{\{i,j\}})$ tiene crecimiento infinito.

4) Si $a_{ii} = 2$, $a_{ij} \neq 0$, $a_{ji} = a_{jj} = 0$ entonces $a_{jk} \neq 0$ para algún $k \in I$ por ser A elemental. Luego por el Lema 3 $g(A_{\{i,j,k\}})$ tiene crecimiento infinito.

5) Si $a_{ii} = a_{jj} = 2$, $a_{ij} \neq 0$ $a_{ji} = 0$ entonces $A_{\{i,j\}}$ satisface las condiciones del Lema 1 $g(A_{\{i,j\}})$ tiene crecimiento infinito.

6) Si $a_{ii} = 0$ $a_{ij} \neq 0$ y $a_{ji} = a_{jj} = 0$, entonces $a_{jk} \neq 0$ para algún $k \in I$ por ser A elemental. Luego por el Lema 3 $g(A_{\{i,j,k\}})$ tiene crecimiento infinito.

4) Si $a_{ii} = 2$, $a_{ij} \neq 0$, $a_{ji} = a_{jj} = 0$ entonces $a_{jk} \neq 0$ para algún $k \in I$ por ser A elemental. Luego por el Lema 3 $g(A_{\{i,j,k\}})$ tiene crecimiento infinito.

5) Si $a_{ii} = a_{jj} = 2$, $a_{ij} \neq 0$ $a_{ji} = 0$ entonces $A_{\{i,j\}}$ satisface las condiciones del Lema 1 $g(A_{\{i,j\}})$ tiene crecimiento infinito.

6) Si $a_{ii} = 0$ $a_{ij} \neq 0$ y $a_{ji} = a_{jj} = 0$, entonces $a_{jk} \neq 0$ para algún $k \in I$ por ser A elemental. Luego por el Lema 3 $g(A_{\{i,j,k\}})$ tiene crecimiento infinito.

7) Si $a_{ii} = a_{ij} = 0$ $a_{ij} \neq 0$ y $a_{jj} = 2$, entonces $A_{\{i,j\}}$ satisface las condiciones del Lema 1 y luego $g(A_{\{i,j\}})$ tiene crecimiento infinito.

Reflexiones impares

Si α_i es una raíz isotrópica (regular), definimos la reflexión impar (regular) σ_i del siguiente modo:

Reflexiones impares

Si α_i es una raíz isotrópica (regular), definimos la reflexión impar (regular) σ_i del siguiente modo:

$$\sigma_i(\alpha_k) = \begin{cases} -\alpha_i & \text{si } k = i \\ \alpha_k & \text{si } k \neq i \text{ y } a_{ik} = a_{ki} = 0 \\ \alpha_k + \alpha_i & \text{si } a_{ik} \neq 0 \text{ o } a_{ki} \neq 0 \text{ para } k \neq i. \end{cases}$$

y los elementos X_i',

y los elementos X_i', Y_i',

y los elementos X_i', Y_i', h_i' del siguiente modo:

y los elementos X'_i, Y'_i, h'_i del siguiente modo:

$$X'_k = \begin{cases} Y_i & \text{si } k = i \\ X_k & \text{si } k \neq i \text{ y } a_{ik} = a_{ki} = 0 \\ [X_k, X_i] & \text{si } a_{ik} \neq 0 \text{ o } a_{ki} \neq 0 \text{ para } k \neq i. \end{cases}$$

y los elementos X'_i, Y'_i, h'_i del siguiente modo:

$$X'_k = \begin{cases} Y_i & \text{si } k = i \\ X_k & \text{si } k \neq i \text{ y } a_{ik} = a_{ki} = 0 \\ [X_k, X_i] & \text{si } a_{ik} \neq 0 \text{ o } a_{ki} \neq 0 \text{ para } k \neq i. \end{cases}$$

$$Y'_k = \begin{cases} X_i & \text{si } k = i \\ Y_k & \text{si } k \neq i \text{ y } a_{ik} = a_{ki} = 0 \\ [Y_i, Y_k] & \text{si } a_{ik} \neq 0 \text{ o } a_{ki} \neq 0 \text{ para } k \neq i. \end{cases}$$

$$h'_k = [X'_k, Y'_k].$$

$$h'_k = [X'_k, Y'_k].$$

$$h'_k = \begin{cases} h_i & \text{si } k = i \\ h_k & \text{si } k \neq i \text{ y } a_{ik} = a_{ki} = 0 \\ (-1)^{P(k)}(a_{ik}h_k + a_{ki}h_i) & \text{si } a_{ik} \neq 0 \text{ o } a_{ki} \neq 0 \text{ para } k \neq i \end{cases}$$

Definimos además para cada $k \in I$

Definimos además para cada $k \in I$

$$\alpha'_k := \sigma_i(\alpha_k).$$

Definimos además para cada $k \in I$

$$\alpha'_k := \sigma_i(\alpha_k).$$

Entonces tenemos el siguiente resultado:

Teorema

Sea $g(A)$ una superálgebra de Lie contragradiente con raíces simples $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$.

Teorema

Sea $g(A)$ una superálgebra de Lie contragradiente con raíces simples $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$.

Supongamos que $\Pi' = \{\alpha'_1, .., \alpha'_n\}$ *es el conjunto obtenido de* Π *por una reflexión* σ_i *impar regular.*

Teorema

Sea $g(A)$ una superálgebra de Lie contragradiente con raíces simples $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$.
Supongamos que $\Pi' = \{\alpha'_1, .., \alpha'_n\}$ es el conjunto obtenido de Π por una reflexión σ_i impar regular.
Entonces $\{\alpha'_1, .., \alpha'_n\}$ es linealmente independiente.

Teorema

Sea $g(A)$ una superálgebra de Lie contragradiente con raíces simples $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$.
Supongamos que $\Pi' = \{\alpha'_1, .., \alpha'_n\}$ es el conjunto obtenido de Π por una reflexión σ_i impar regular.
Entonces $\{\alpha'_1, .., \alpha'_n\}$ es linealmente independiente.
Además, los elementos correspondientes X'_i, Y'_i h'_i para $i \in I$ satisfacen las relaciones

$$[h'_j, X'_i] = \alpha'_i(h'_j)X'_i$$
$$[h'_j, Y'_i] = -\alpha'_i(h'_j)Y'_i$$
$$[X'_i, Y'_j] = \delta_{ij}h'_i.$$

Teorema

Sea $g(A)$ una superálgebra de Lie contragradiente con raíces simples $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$.
Supongamos que $\Pi' = \{\alpha'_1, .., \alpha'_n\}$ es el conjunto obtenido de Π por una reflexión σ_i impar regular.
Entonces $\{\alpha'_1, .., \alpha'_n\}$ es linealmente independiente.
Además, los elementos correspondientes X'_i, Y'_i h'_i para $i \in I$ satisfacen las relaciones

$$[h'_j, X'_i] = \alpha'_i(h'_j)X'_i$$
$$[h'_j, Y'_i] = -\alpha'_i(h'_j)Y'_i$$
$$[X'_i, Y'_j] = \delta_{ij}h'_i.$$

Más aún, X'_i, Y'_i, h'_i, $i \in I$ generan a $g(A)$.
$g(A,\tau) \simeq g(A',\tau')$ donde
$\tau' = \{k \in \tau, k \neq i$ tal que $a_{ik} = 0 = a_{ki}\} \cup \{i\}$.

DEMOSTRACIÓN

DEMOSTRACIÓN

Debemos ver que $[X'_j, Y'_k] = 0$ para $j \neq k$.

DEMOSTRACIÓN

Debemos ver que $[X_j', Y_k'] = 0$ para $j \neq k$.
Si $j, k \neq i$, las posibilidades para $\sigma_i(\alpha_j) - \sigma_i(\alpha_k)$ son

DEMOSTRACIÓN

Debemos ver que $[X'_j, Y'_k] = 0$ para $j \neq k$.
Si $j, k \neq i$, las posibilidades para $\sigma_i(\alpha_j) - \sigma_i(\alpha_k)$ son

$$\begin{cases} \alpha_j - \alpha_k & \text{Si } a_{ij} = a_{ji} = a_{ki} = a_{ik} = 0 \\ \alpha_j - \alpha_k - \alpha_i & \text{Si } a_{ij} = a_{ji} = 0 \text{ y } a_{ki} \neq 0 \text{ o } a_{ik} \neq 0 \\ \alpha_j + \alpha_i - \alpha_k & \text{Si } a_{ik} = a_{ki} = 0 \text{ y } a_{ji} \neq 0 \text{ o } a_{ij} \neq 0 \\ \alpha_j - \alpha_k & \text{Si } a_{ik} \neq 0 \text{ o } a_{ki} \neq 0 \text{ y } a_{ji} \neq 0 \text{ o } a_{ij} \neq 0. \end{cases}$$

Viendo caso por caso, tenemos que si $j, k \neq i$ entonces $\sigma_i(\alpha_j) - \sigma_i(\alpha_k) \notin \Delta$, y luego $[X'_j, Y'_k] = 0$.

Viendo caso por caso, tenemos que si $j, k \neq i$ entonces $\sigma_i(\alpha_j) - \sigma_i(\alpha_k) \notin \Delta$, y luego $[X'_j, Y'_k] = 0$.
Asumamos ahora que $j = i$ $(k \neq i)$.

Viendo caso por caso, tenemos que si $j, k \neq i$ entonces $\sigma_i(\alpha_j) - \sigma_i(\alpha_k) \notin \Delta$, y luego $[X'_j, Y'_k] = 0$.
Asumamos ahora que $j = i$ ($k \neq i$). Las posibilidades para $[X'_i, Y'_k]$ son

$$\begin{cases} [Y_i, Y_k] = 0 & \text{si } a_{ki} = a_{ik} = 0 \\ [Y_i, [Y_k, Y_i]] = c[Y_i, [Y_i, Y_k]] = 0 & \text{si } a_{ki} \neq 0 \neq a_{ik}. \end{cases}$$

Viendo caso por caso, tenemos que si $j, k \neq i$ entonces $\sigma_i(\alpha_j) - \sigma_i(\alpha_k) \notin \Delta$, y luego $[X'_j, Y'_k] = 0$.
Asumamos ahora que $j = i$ $(k \neq i)$. Las posibilidades para $[X'_i, Y'_k]$ son

$$\begin{cases} [Y_i, Y_k] = 0 & \text{si } a_{ki} = a_{ik} = 0 \\ [Y_i, [Y_k, Y_i]] = c[Y_i, [Y_i, Y_k]] = 0 & \text{si } a_{ki} \neq 0 \neq a_{ik}. \end{cases}$$

puesto que $ad^2 Y_i = 0$.

Viendo caso por caso, tenemos que si $j, k \neq i$ entonces $\sigma_i(\alpha_j) - \sigma_i(\alpha_k) \notin \Delta$, y luego $[X'_j, Y'_k] = 0$.
Asumamos ahora que $j = i$ $(k \neq i)$. Las posibilidades para $[X'_i, Y'_k]$ son

$$\begin{cases} [Y_i, Y_k] = 0 & \text{si } a_{ki} = a_{ik} = 0 \\ [Y_i, [Y_k, Y_i]] = c[Y_i, [Y_i, Y_k]] = 0 & \text{si } a_{ki} \neq 0 \neq a_{ik}. \end{cases}$$

puesto que $ad^2 Y_i = 0$. El caso $k = i$ es análogo al anterior.

Por último, notemos que si $\sigma_i(\alpha_j) = \alpha_j + \alpha_i$

Por último, notemos que si $\sigma_i(\alpha_j) = \alpha_j + \alpha_i$ (i.e. $a_{ij} \neq 0$ y $a_{ji} \neq 0$ puesto que α_i es regular) entonces,

Por último, notemos que si $\sigma_i(\alpha_j) = \alpha_j + \alpha_i$ (i.e. $a_{ij} \neq 0$ y $a_{ji} \neq 0$ puesto que α_i es regular) entonces,

$$X_j = \frac{1}{a_{ij}}[Y_i, [X_i, X_j]] = d[X_i', X_j']$$

Por último, notemos que si $\sigma_i(\alpha_j) = \alpha_j + \alpha_i$ (i.e. $a_{ij} \neq 0$ y $a_{ji} \neq 0$ puesto que α_i es regular) entonces,

$$X_j = \frac{1}{a_{ij}}[Y_i, [X_i, X_j]] = d[X_i', X_j']$$

con $d \neq 0$.

Similarmente

$$Y_j = d'[Y_i', Y_j'].$$

Si $\sigma_i(\alpha_j) = \alpha_j$,

Si $\sigma_i(\alpha_j) = \alpha_j$, entonces $X_j = X_j'$, $Y_j = Y_j'$.

Si $\sigma_i(\alpha_j) = \alpha_j$, entonces $X_j = X_j'$, $Y_j = Y_j'$.
Finalmente, $X_i = Y_i'$ y $Y_i = X_i'$.

Si $\sigma_i(\alpha_j) = \alpha_j$, entonces $X_j = X_j'$, $Y_j = Y_j'$.
Finalmente, $X_i = Y_i'$ y $Y_i = X_i'$. Luego todo generador X_j, Y_j puede expresarse en términos de $X_1', ..., X_n', Y_1', ..., Y_n'$.

Matriz obtenida por reflexión impar

Matriz obtenida por reflexión impar

Se sigue entonces que dada una matriz A y una raíz isotrópica regular α_i, podemos construir una nueva matriz A' tal que $g(A) \simeq g(A')$ como superálgebras de Lie.

Explícitamente, las entradas de A' pueden definirse por $A'_{kj} = \alpha'_j(h'_k)$.

Explícitamente, las entradas de A' pueden definirse por $A'_{kj} = \alpha'_j(h'_k)$.
Después de reescalar los elementos h'_k tenemos que para $j, k \neq i$

$$a'_{ii} = a_{ii} = 0$$
$$a'_{ij} = a_{ij}$$
$$a'_{ki} = -a_{ik}a_{ki}$$

Explícitamente, las entradas de A' pueden definirse por $A'_{kj} = \alpha'_j(h'_k)$.
Después de reescalar los elementos h'_k tenemos que para $j, k \neq i$

$$a'_{ii} = a_{ii} = 0$$
$$a'_{ij} = a_{ij}$$
$$a'_{ki} = -a_{ik}a_{ki}$$

$$a_{kj} =$$

$$\begin{cases} a_{kj} & a_{ik} = a_{ki} = 0 \\ a_{ik}a_{kj} & a_{ki} \neq 0 \text{ o } a_{ik} \neq 0 \text{ y } a_{ij} = a_{ji} = 0 \\ a_{ik}a_{kj} + a_{ki}a_{ij} + a_{ik}a_{ki} & a_{ik} \neq 0 \text{ o } a_{ki} \neq 0 \text{ y } a_{ji} \neq 0 \text{ o } a_{ij} \neq 0 \end{cases}$$

Observación

Podemos reescalar las filas de A' reescalando los elementos h'_k.

Observación

Podemos reescalar las filas de A' reescalando los elementos h'_k. Por lo que, podemos asumir que $a'_{kk} \in \{0, 2\}$.

Observación

Podemos reescalar las filas de A' reescalando los elementos h'_k. Por lo que, podemos asumir que $a'_{kk} \in \{0, 2\}$. En caso de que $a'_{kk} = 0$ para algún k, es nuestra convención reescalar A' tal que $a_{kj} = 1$ para algún j.

Observación

Podemos reescalar las filas de A' reescalando los elementos h'_k. Por lo que, podemos asumir que $a'_{kk} \in \{0, 2\}$.
En caso de que $a'_{kk} = 0$ para algún k, es nuestra convención reescalar A' tal que $a_{kj} = 1$ para algún j.
Si A' es obtenida de A por una reflexión impar regular respecto de α_i entonces

Observación

Podemos reescalar las filas de A' reescalando los elementos h'_k. Por lo que, podemos asumir que $a'_{kk} \in \{0, 2\}$. En caso de que $a'_{kk} = 0$ para algún k, es nuestra convención reescalar A' tal que $a_{kj} = 1$ para algún j. Si A' es obtenida de A por una reflexión impar regular respecto de α_i entonces

$$\Delta'^{+} = (\Delta^{+} - \{\alpha_i\}) \cup \{-\alpha_i\}.$$

Observación

Podemos reescalar las filas de A' reescalando los elementos h'_k.
Por lo que, podemos asumir que $a'_{kk} \in \{0, 2\}$.
En caso de que $a'_{kk} = 0$ para algún k, es nuestra convención reescalar A' tal que $a_{kj} = 1$ para algún j.
Si A' es obtenida de A por una reflexión impar regular respecto de α_i entonces

$$\Delta'^{+} = (\Delta^{+} - \{\alpha_i\}) \cup \{-\alpha_i\}.$$

Si A'' es obtenida tras aplicar dos veces una reflexión impar regular a A,

Observación

Podemos reescalar las filas de A' reescalando los elementos h'_k. Por lo que, podemos asumir que $a'_{kk} \in \{0, 2\}$.
En caso de que $a'_{kk} = 0$ para algún k, es nuestra convención reescalar A' tal que $a_{kj} = 1$ para algún j.
Si A' es obtenida de A por una reflexión impar regular respecto de α_i entonces

$$\Delta'^{+} = (\Delta^{+} - \{\alpha_i\}) \cup \{-\alpha_i\}.$$

Si A'' es obtenida tras aplicar dos veces una reflexión impar regular a A, entonces existe una matriz diagonal inversible D tal que $A'' = DA$

Observación

Podemos reescalar las filas de A' reescalando los elementos h'_k. Por lo que, podemos asumir que $a'_{kk} \in \{0, 2\}$.
En caso de que $a'_{kk} = 0$ para algún k, es nuestra convención reescalar A' tal que $a_{kj} = 1$ para algún j.
Si A' es obtenida de A por una reflexión impar regular respecto de α_i entonces

$$\Delta'^{+} = (\Delta^{+} - \{\alpha_i\}) \cup \{-\alpha_i\}.$$

Si A'' es obtenida tras aplicar dos veces una reflexión impar regular a A, entonces existe una matriz diagonal inversible D tal que $A'' = DA$ y escalares b_k, c_k tales que $X''_k = b_k X_k$ y $Y''_i = c_k Y_k$.

Proposición

Si A es elemental

Proposición

Si A es elemental (no elemental),

Proposición

Si A es elemental (no elemental), entonces toda matriz A' obtenida de A por una reflexión impar regular es elemental

Proposición

Si A es elemental (no elemental), entonces toda matriz A' obtenida de A por una reflexión impar regular es elemental (no elemental).

DEMOSTRACIÓN

Si la i-ésima fila de A es nula, entonces una reflexión impar no modifica a α_i ni a h_i y luego la i-ésima fila de A' es cero.

DEMOSTRACIÓN

Si la i-ésima fila de A es nula, entonces una reflexión impar no modifica a α_i ni a h_i y luego la i-ésima fila de A' es cero. Supongamos que la i-ésima fila de A' es cero.

DEMOSTRACIÓN

Si la i-ésima fila de A es nula, entonces una reflexión impar no modifica a α_i ni a h_i y luego la i-ésima fila de A' es cero.
Supongamos que la i-ésima fila de A' es cero. Entonces $\alpha'_j(h'_i) = 0$ para todo $j \in I$.

DEMOSTRACIÓN

Si la i-ésima fila de A es nula, entonces una reflexión impar no modifica a α_i ni a h_i y luego la i-ésima fila de A' es cero.
Supongamos que la i-ésima fila de A' es cero. Entonces $\alpha'_j(h'_i) = 0$ para todo $j \in I$.
Supongamos que A' es obtenida por la reflexión σ_k.

DEMOSTRACIÓN

Si la i-ésima fila de A es nula, entonces una reflexión impar no modifica a α_i ni a h_i y luego la i-ésima fila de A' es cero.
Supongamos que la i-ésima fila de A' es cero. Entonces $\alpha'_j(h'_i) = 0$ para todo $j \in I$.
Supongamos que A' es obtenida por la reflexión σ_k.
Entonces si $a_{ki} \neq 0$

DEMOSTRACIÓN

Si la i-ésima fila de A es nula, entonces una reflexión impar no modifica a α_i ni a h_i y luego la i-ésima fila de A' es cero.
Supongamos que la i-ésima fila de A' es cero. Entonces $\alpha'_j(h'_i) = 0$ para todo $j \in I$.
Supongamos que A' es obtenida por la reflexión σ_k.
Entonces si $a_{ki} \neq 0$

$$h'_i = c(a_{ik}h_k + a_{ki}h_i)$$

con $c \neq 0$ $\alpha'_k(h'_i) = 0 = c(-a_{ik}a_{kk} - a_{ki}a_{ik})$ y sabemos que $a_{kk} = 0$. Luego $a_{ik} = 0$.

Por lo que si $a_{ki} \neq 0$

Por lo que si $a_{ki} \neq 0$

$$h_i' = ca_{ki}h_i.$$

Por lo que si $a_{ki} \neq 0$

$$h'_i = ca_{ki}h_i.$$

De donde se sigue que $a_{ij} = \alpha_j(h_i) = \frac{1}{a_{ki}}\frac{1}{c}\alpha'_j(h'_i) = 0$ para todo $j \neq k$.

Por lo que si $a_{ki} \neq 0$

$$h'_i = c a_{ki} h_i.$$

De donde se sigue que $a_{ij} = \alpha_j(h_i) = \frac{1}{a_{ki}} \frac{1}{c} \alpha'_j(h'_i) = 0$ para todo $j \neq k$.

Por otro lado, si $a_{ki} = 0$, entonces $(a_{ik} = 0)$

Por lo que si $a_{ki} \neq 0$

$$h_i' = c a_{ki} h_i.$$

De donde se sigue que $a_{ij} = \alpha_j(h_i) = \frac{1}{a_{ki}} \frac{1}{c} \alpha_j'(h_i') = 0$ para todo $j \neq k$.

Por otro lado, si $a_{ki} = 0$, entonces $(a_{ik} = 0)$

$$h_i' = h_i.$$

Por lo que si $a_{ki} \neq 0$

$$h_i' = ca_{ki}h_i.$$

De donde se sigue que $a_{ij} = \alpha_j(h_i) = \frac{1}{a_{ki}}\frac{1}{c}\alpha_j'(h_i') = 0$ para todo $j \neq k$.

Por otro lado, si $a_{ki} = 0$, entonces $(a_{ik} = 0)$

$$h_i' = h_i.$$

En este caso tenemos que $a_{ij} = \alpha_j(h_i) = \alpha_j'(h_i') = 0$ para todo $j \in I$.

La noción de crecimiento no depende en la elección del sistema de raíces simples de $g(A)$:

La noción de crecimiento no depende en la elección del sistema de raíces simples de $g(A)$:

Lema

Sea Π' un sistema de raíces simples obtenido de Π por una reflexión impar. Entonces $dim g'_n \leq dim g_{-2n} \oplus \ldots \oplus g_{2n}$.

La noción de crecimiento no depende en la elección del sistema de raíces simples de $g(A)$:

Lema

Sea Π' un sistema de raíces simples obtenido de Π por una reflexión impar. Entonces $\dim g'_n \leq \dim g_{-2n} \oplus \ldots \oplus g_{2n}$.
En particular, si $g(A)$ es de crecimiento finito, entonces $g(A')$ es de crecimiento finito.

Teorema

Sea A una matriz elemental y $g(A)$ de crecimiento finito. Entonces A y toda matriz A' obtenida de A por una secuencia de reflexiones impares regulares satisface las condiciones

Teorema

Sea A una matriz elemental y $g(A)$ de crecimiento finito. Entonces A y toda matriz A' obtenida de A por una secuencia de reflexiones impares regulares satisface las condiciones

1) $a_{ii} = 0$ *o* $a_{ii} = 2$ *para* $i \in I$.

Teorema

Sea A una matriz elemental y $g(A)$ de crecimiento finito. Entonces A y toda matriz A' obtenida de A por una secuencia de reflexiones impares regulares satisface las condiciones

1) $a_{ii} = 0$ *o* $a_{ii} = 2$ *para* $i \in I$.

2) Si $a_{ii} = 0$ *entonces* $P(i) = 1$.

Teorema

Sea A una matriz elemental y $g(A)$ de crecimiento finito. Entonces A y toda matriz A' obtenida de A por una secuencia de reflexiones impares regulares satisface las condiciones

1) $a_{ii} = 0$ *o* $a_{ii} = 2$ *para* $i \in I$.

2) Si $a_{ii} = 0$ *entonces* $P(i) = 1$.

3) Si $a_{ii} = 2$ *entonces* $a_{ij} \in 2^{P(i)}\mathbb{Z}_-$.

Teorema

Sea A una matriz elemental y $g(A)$ de crecimiento finito. Entonces A y toda matriz A' obtenida de A por una secuencia de reflexiones impares regulares satisface las condiciones

1) $a_{ii} = 0$ *o* $a_{ii} = 2$ *para* $i \in I$.

2) Si $a_{ii} = 0$ *entonces* $P(i) = 1$.

3) Si $a_{ii} = 2$ *entonces* $a_{ij} \in 2^{P(i)}\mathbb{Z}_{-}$.

4) Si $a_{ij} = 0$ *y* $a_{ji} \neq 0$ *entonces* $a_{ii} = 0$.

Lema

Una matriz A que satisface las condiciones anteriores es una matriz generalizada de Cartan si y sólo si Π no contiene raíces isotrópicas singulares.

Kac-Moody regulares

Kac-Moody regulares

Definición

Diremos que $g(A)$ es una superálgebra regular de Kac-Moody si A y toda matriz obtenida de A por una secuencia de reflexiones impares es una matriz generalizada de Cartan.

Kac-Moody regulares

Definición

Diremos que $g(A)$ es una superálgebra regular de Kac-Moody si A y toda matriz obtenida de A por una secuencia de reflexiones impares es una matriz generalizada de Cartan.

Corolario

Si A es simetrizable con un cero en la diagonal y $g(A)$ tiene crecimiento finito, entonces $g(A)$ es una superálgebra regular de Kac-Moody.

Diagramas y matrices para superálgebras regulares de Kac-Moody

Diagramas y matrices para superálgebras regulares de Kac-Moody

Dada una matriz de Cartan A, podemos asociarle un diagrama Γ_A del siguiente modo:

Diagramas y matrices para superálgebras regulares de Kac-Moody

Dada una matriz de Cartan A, podemos asociarle un diagrama Γ_A del siguiente modo: Los vértices de Γ_A corresponden a las raíces simples de $g(A)$ y vienen dados por la siguiente tabla

Diagramas y matrices para superálgebras regulares de Kac-Moody

Dada una matriz de Cartan A, podemos asociarle un diagrama Γ_A del siguiente modo: Los vértices de Γ_A corresponden a las raíces simples de $g(A)$ y vienen dados por la siguiente tabla

$g(A)$	A	$P(1)$	Diagrama
A_1	(2)	0	$\bigcirc$
$B(0,1) = osp(1,2)$	(2)	1	$\bullet$
$A(0,0) = sl(1,1)$	(0)	1	$\otimes$
Heisenberg	(0)	0	$\square$

Unimos el vértice v_i con el vértice v_j con una flecha si $a_{ij} \neq 0$ y le agregamos a esta flecha el número a_{ij}.

Unimos el vértice v_i con el vértice v_j con una flecha si $a_{ij} \neq 0$ y le agregamos a esta flecha el número a_{ij}.
Así la correspondencia entre matrices y diagramas es biyectivo.

Unimos el vértice v_i con el vértice v_j con una flecha si $a_{ij} \neq 0$ y le agregamos a esta flecha el número a_{ij}.
Así la correspondencia entre matrices y diagramas es biyectivo.
La condición de que A sea indescomponible corresponde al requerimiento de que el diagrama sea conexo.

Unimos el vértice v_i con el vértice v_j con una flecha si $a_{ij} \neq 0$ y le agregamos a esta flecha el número a_{ij}.
Así la correspondencia entre matrices y diagramas es biyectivo.
La condición de que A sea indescomponible corresponde al requerimiento de que el diagrama sea conexo.
Diremos que un vértice es isotrópico si es de tipo $\otimes$.

Usamos las siguiente notación para denotar los posibles tipos de vértices:

Usamos las siguiente notación para denotar los posibles tipos de vértices:

Notación	Tipo de Vértices
$\blacksquare$	$\bigcirc$ o $\otimes$
$\odot$	$\bigcirc$ o $\bullet$
$\circledast$	$\bigcirc$ o $\bullet$ o $\otimes$

Sea A una matriz tal que $a_{ii} = 0$.

Sea A una matriz tal que $a_{ii} = 0$.
Luego reescalar la i-ésima fila de A corresponde a reescalar todos las flechas que salen del vértice v_i en el diagrama Γ_A.

Sea A una matriz tal que $a_{ii} = 0$.
Luego reescalar la i-ésima fila de A corresponde a reescalar todos las flechas que salen del vértice v_i en el diagrama Γ_A.
Esto define una relación de equivalencia entre diagramas, donde $\Gamma'_A \sim \Gamma_A$ si $A' = DA$ para alguna matriz diagonal D, y en este caso $g(A) \simeq g(A')$.

Sea A una matriz tal que $a_{ii} = 0$.
Luego reescalar la i-ésima fila de A corresponde a reescalar todos las flechas que salen del vértice v_i en el diagrama Γ_A.
Esto define una relación de equivalencia entre diagramas, donde $\Gamma'_A \sim \Gamma_A$ si $A' = DA$ para alguna matriz diagonal D, y en este caso $g(A) \simeq g(A')$.
Consideraremos los diagramas módulo esta equivalencia.

Un diagrama se dice regular de Kac-Moody si la correspondiente superálgebra de Lie contragradiente es regular de Kac-Moody.

Un diagrama se dice regular de Kac-Moody si la correspondiente superálgebra de Lie contragradiente es regular de Kac-Moody.
Una reflexión impar de un diagrama en un vértice isotrópico v_i es el diagrama $\Gamma_{A'}$ donde A' es la matriz obtenida de A por una reflexión impar en la correspondiente raíz isotrópica α_i.

Un diagrama se dice regular de Kac-Moody si la correspondiente superálgebra de Lie contragradiente es regular de Kac-Moody.

Una reflexión impar de un diagrama en un vértice isotrópico v_i es el diagrama $\Gamma_{A'}$ donde A' es la matriz obtenida de A por una reflexión impar en la correspondiente raíz isotrópica α_i.

Notemos que el conjunto de diagramas regulares de Kac-Moody es cerrado por reflexiones impares regulares.

Un diagrama se dice regular de Kac-Moody si la correspondiente superálgebra de Lie contragradiente es regular de Kac-Moody.

Una reflexión impar de un diagrama en un vértice isotrópico v_i es el diagrama $\Gamma_{A'}$ donde A' es la matriz obtenida de A por una reflexión impar en la correspondiente raíz isotrópica α_i.

Notemos que el conjunto de diagramas regulares de Kac-Moody es cerrado por reflexiones impares regulares.

Denotamos por $C(\Gamma)$ a la colección de todos los diagramas obtenidos por secuencias de reflexiones impares de un diagrama regular de Kac-Moody Γ.

Por subdiagrama Γ' de Γ, entendemos un subdiagrama completo, Por subdiagrama Γ' de Γ, entendemos un subdiagrama completo, i.e. si los vértices v_i y v_j están en Γ', entonces

Por subdiagrama Γ' de Γ, entendemos un subdiagrama completo, i.e. si los vértices v_i y v_j están en Γ', entonces las flechas enumeradas con a_{ij} y a_{ji} también pertenecen a Γ'.

Por subdiagrama Γ' de Γ, entendemos un subdiagrama completo, i.e. si los vértices v_i y v_j están en Γ', entonces las flechas enumeradas con a_{ij} y a_{ji} también pertenecen a Γ'. Diremos que un diagrama conexo y regular de Kac-Moody es extendible si es un subdiagrama conexo de un diagrama regular de Kac-Moody conexo.

Diagramas de Kac-Moody regulares conexos subfinitos

Diagramas de Kac-Moody regulares conexos subfinitos

Hoyt clasificó las superálgebras regulares de Kac-Moody clasificando los diagramas regulares de Kac-moody.

Diagramas de Kac-Moody regulares conexos subfinitos

Hoyt clasificó las superálgebras regulares de Kac-Moody clasificando los diagramas regulares de Kac-moody. Un diagrama para una superálgebra de Lie de Kac-Moody de dimensión finita o afín es regular de Kac-Moody.

Definición

Diremos que un diagrama regular de Kac-Moody es subfinito si es conexo, contiene un vértice isotrópico y satisface la siguiente condición para todo diagrama reflejado:

Definición

Diremos que un diagrama regular de Kac-Moody es subfinito si es conexo, contiene un vértice isotrópico y satisface la siguiente condición para todo diagrama reflejado: todos los subdiagramas conexos propios que contienen un vértice isotrópico son de tipo finito.

Definición

Diremos que un diagrama regular de Kac-Moody es subfinito si es conexo, contiene un vértice isotrópico y satisface la siguiente condición para todo diagrama reflejado: todos los subdiagramas conexos propios que contienen un vértice isotrópico son de tipo finito.

Hoyt demuestra que todos todos los diagramas regulares de Kac-Moody son subfinitos.

2 vértices

2 vértices

Usando las reflexiones impares Hoyt describe todos los diagramas con dos o tres vértices que son regulares de Kac-Moody y contienen un vértice isotrópico.

Lema

Los diagramas regulares de Kac-Moody de 2 vértices que contienen un vértice isotrópico son $A(1,0) = sl(2,1)$ *y* $B(1,1) = osp(3,2)$.

Recordemos que en el caso en que $a_{ii} = 0$ reescalamos a A de modo que $a_{ij} = 1$ para algún j.

Recordemos que en el caso en que $a_{ii} = 0$ reescalamos a A de modo que $a_{ij} = 1$ para algún j.
Empezamos con la siguiente situación

$$\otimes \;\underset{a}{\overset{1}{\rightleftarrows}}\; \circledast$$

Recordemos que en el caso en que $a_{ii} = 0$ reescalamos a A de modo que $a_{ij} = 1$ para algún j.
Empezamos con la siguiente situación

$$\otimes \;\; \underset{a}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \circledast$$

es decir estamos considerando $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & \star \end{pmatrix}$

Recordemos que en el caso en que $a_{ii} = 0$ reescalamos a A de modo que $a_{ij} = 1$ para algún j.
Empezamos con la siguiente situación

$$\otimes \;\; \underset{a}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \circledast$$

es decir estamos considerando $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & \star \end{pmatrix}$ donde $\star \in \{0, 2\}$.

Por ser A regular $a \neq 0$.

Por ser A regular $a \neq 0$. Si $\star = 0$, reescalando a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, obtenemos

Por ser A regular $a \neq 0$. Si $\star = 0$, reescalando a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, obtenemos $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que es una matriz de Cartan para $A(1,0)$.

Luego, podemos asumir que $\star = 2$.

Luego, podemos asumir que $\star = 2$.

• Si $a \neq -1$, Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ entonces reflejando en v_1 obtenemos

Luego, podemos asumir que $\star = 2$.

- Si $a \neq -1$, Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ entonces reflejando en v_1 obtenemos

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 2(a+1) \end{pmatrix},$$

Luego, podemos asumir que $\star = 2$.

• Si $a \neq -1$, Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ entonces reflejando en v_1 obtenemos

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 2(a+1) \end{pmatrix},$$

que después de normalizar nos da

Luego, podemos asumir que $\star = 2$.

• Si $a \neq -1$, Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ entonces reflejando en v_1 obtenemos

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 2(a+1) \end{pmatrix},$$

que después de normalizar nos da

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a}{a+1} & 2 \end{pmatrix}$$

Por ser A una matriz generalizada de Cartan, Por ser A una matriz generalizada de Cartan, $a \in \mathbb{Z}_-$ y $-\frac{a}{a+1} \in \mathbb{Z}_-$ lo que implica $a = -2$.

Por ser A una matriz generalizada de Cartan, $a \in \mathbb{Z}_-$ y $-\frac{a}{a+1} \in \mathbb{Z}_-$ lo que implica $a = -2$. Luego $A = A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, por lo que $g(A)$ es $B(1,1) = osp(3,2)$.

- Si $a = -1$,

- Si $a = -1$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

- Si $a = -1$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

entonces $P(2) = 0$, puesto que $a_{21} \in 2^{P(i)}\mathbb{Z}_{-}$.

- Si $a = -1$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

entonces $P(2) = 0$, puesto que $a_{21} \in 2^{P(i)}\mathbb{Z}_{-}$. Luego el diagrama es

$$\bigotimes \quad \underset{-1}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \bigcirc$$

Reflejamos en v_1 y obtenemos

Reflejamos en v_1 y obtenemos

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Reflejamos en v_1 y obtenemos

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que corresponde al diagrama

$$\otimes \; \begin{matrix} \longrightarrow^{1} \\ \longleftarrow_{1} \end{matrix} \otimes$$

Así, obtuvimos en este caso ambas matrices y diagramas para $A(1,1) = sl(2,1)$, Así, obtuvimos en este caso ambas matrices y diagramas para $A(1,1) = sl(2,1)$, como habíamos obtenido al fijar los dos posibles sistemas de raíces simples en el estudio de la exposición de Van de Leur.

Lema

Lema

Las extensiones regulares de Kac-Moody de tipo finito a tres vértices son las siguientes:

Lema

Las extensiones regulares de Kac-Moody de tipo finito a tres vértices son las siguientes:

$$A(0,2),\ A(1,1),\ B(1,2),\ B(2,1),\ C(3),\ G(3),\ D(2,1,\alpha)$$

Lema

Las extensiones regulares de Kac-Moody de tipo finito a tres vértices son las siguientes:

$$A(0,2),\ A(1,1),\ B(1,2),\ B(2,1),\ C(3),\ G(3),\ D(2,1,\alpha)$$

con $\alpha \neq -1, 0$.

Ejemplo:

Ejemplo: Consideramos un caso en el que le agregamos un vértice a un diagrama de $A(1,0)$

Ejemplo: Consideramos un caso en el que le agregamos un vértice a un diagrama de $A(1,0)$ Supongamos que v_3 es gris.

Ejemplo: Consideramos un caso en el que le agregamos un vértice a un diagrama de $A(1,0)$ Supongamos que v_3 es gris.

$$\otimes \ \underset{1}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \ \otimes \ \underset{1}{\overset{a}{\rightleftarrows}} \ \otimes$$

Ejemplo: Consideramos un caso en el que le agregamos un vértice a un diagrama de $A(1,0)$ Supongamos que v_3 es gris.

$$\otimes \; \underset{1}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \; \otimes \; \underset{1}{\overset{a}{\rightleftarrows}} \; \otimes$$

Reflejando en v_2 tenemos que $1+a, 1+\frac{1}{a} \in \mathbb{Z}_-$ lo que implica $a=-1$.

Ejemplo: Consideramos un caso en el que le agregamos un vértice a un diagrama de $A(1,0)$ Supongamos que v_3 es gris.

$$\otimes \;\underset{1}{\overset{1}{\rightleftarrows}}\; \otimes \;\underset{1}{\overset{a}{\rightleftarrows}}\; \otimes$$

Reflejando en v_2 tenemos que $1+a, 1+\frac{1}{a} \in \mathbb{Z}_-$ lo que implica $a=-1$.

Luego el diagrama es

Ejemplo: Consideramos un caso en el que le agregamos un vértice a un diagrama de $A(1,0)$ Supongamos que v_3 es gris.

$$\otimes \quad \overset{\longrightarrow^{1}}{\longleftarrow_{1}} \otimes \quad \overset{\longrightarrow^{a}}{\longleftarrow_{1}} \otimes$$

Reflejando en v_2 tenemos que $1+a, 1+\frac{1}{a} \in \mathbb{Z}_-$ lo que implica $a=-1$.

Luego el diagrama es

$$\otimes \quad \overset{\longrightarrow^{1}}{\longleftarrow_{1}} \otimes \quad \overset{\longrightarrow^{-1}}{\longleftarrow_{1}} \otimes$$

Ejemplo: Consideramos un caso en el que le agregamos un vértice a un diagrama de $A(1,0)$ Supongamos que v_3 es gris.

$$\bigotimes \ \underset{1}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \bigotimes \ \underset{1}{\overset{a}{\rightleftarrows}} \bigotimes$$

Reflejando en v_2 tenemos que $1+a, 1+\frac{1}{a} \in \mathbb{Z}_-$ lo que implica $a=-1$.
Luego el diagrama es

$$\bigotimes \ \underset{1}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \bigotimes \ \underset{1}{\overset{-1}{\rightleftarrows}} \bigotimes$$

y $g(A)$ es $A(1,1)$.

Hoyt continúa estudiando las posibles extensiones regulares por inducción en los vértices y clasifica todos los diagramas de Kac-Moody regulares subfinitos.

Hoyt continúa estudiando las posibles extensiones regulares por inducción en los vértices y clasifica todos los diagramas de Kac-Moody regulares subfinitos. Esta herramienta es fundamental para la clasificación de las superálgebras de Kac-Moody de crecimiento finito que terminan Hoyt y Serganova.